EINE NACHFRAGETHEORIE OHNE NACHFRAGEFUNKTION

Eberhard Schaich

1967

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546019_0014

Eine Nachfragetheorie ohne Nachfragefunktion

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von
Diplom-Handelslehrer Eberhard Schaich
1967

DISSERTATIONSDRUCK -SCHÖN- München 23 · Belgradstraße 11

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Professor Dr. H. Kellerer
Korreferent: Professor Dr. E. M. Fels
Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1967

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1: NACHFRAGETHEORETISCHE GRUNDLEGUNG

§ 1 Konsumtheoretische Bestandsaufnahme 1

1.1. Statische Nachfragetheorien 1
1.1.1. Die Präferenztheorie 1
1.1.2. Die Nutzentheorie 4
1.1.3. Die Theorie der offenbarten Präferenzen 7
1.1.4. Spieltheoretische Ansätze in der Nachfragetheorie 9

1.2. Dynamische Nachfragetheorien 11
1.2.1. Dynamische Nachfragefunktionen 12
1.2.2. Dynamische Betrachtung der Rationalität des Konsumentenverhaltens 14

§ 2 Einige ungeklärte Fragen 15

2.1. Präferenzen, individuelles Einkommen und Preise als Determinanten der Wahlakte der Konsumeinheiten 15

2.2. Die Rationalität des Konsumentenverhaltens 18

2.3. Wirtschaftsgut und Markenartikel 20

2.4. Die Aggregation individueller Nachfragekurven 23
2.4.1. Die Existenz individueller Nachfragefunktionen . 24
2.4.2. Alternative Aggregationsverfahren für individuelle Nachfragefunktionen 26
2.4.3. Kollektive Nachfragefunktionen als Ausgangskonzept ökonometrischer Nachfrageanalysen 27

§ 3 Vorhaben 28

KAPITEL 2: LERNTHEORETISCHE MODELLE ZUR BESCHREIBUNG UND PROGNOSE DER KONSUMGÜTERMARKENWAHL

§ 4 Markenwahl als Folge unabhängiger Zufallsexperimente 33

4.1. Katalog der Modellannahmen 33

4.2. Modellanalyse 35
4.2.1. Einzelwirtschaftliche Betrachtung 35
4.2.2. Gesamtwirtschaftliche Analyse der Entwicklung der Marktanteile 37

4.3. Sukzessiver Abbau restriktiver akzessorischer Annahmen 39
4.3.1. Individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten 39
4.3.2. Individuelle Kaufintervalle 41
4.3.3. Standard- und Großpackungen 43
4.3.4. Im Zeitablauf variierende Wahlwahrscheinlichkeiten 46

4.4. Kleine Modellkritik 47

§ 5 Markenwahl als MARKOVsche Kette erster Ordnung 48

5.1. Katalog der Modellannahmen 48

5.2. Einzelwirtschaftliche Modellanalyse 52
5.2.1. Der einzelwirtschaftliche Markenwahlprozeß bei einer endlichen Anzahl von sukzessiven Wahlvorgängen 52
5.2.2. Definition und Interpretation einer stationären Endsituation für die Markenwahlvorgänge in einer Verbrauchseinheit 54
5.2.3. Klassifikationen von Verbrauchszuständen eines Haushalts und deren nachfragetheoretische Interpretation 57
5.2.4. Einige Sätze über Grenzwerte von Übergangswahrscheinlichkeiten 61
5.2.5. Die algebraische Behandlung MARKOVscher Ketten erster Ordnung mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten 64
5.2.6. Der einzelwirtschaftliche Markenwahlprozeß in der stationären Endsituation 65

5.3. Gesamtwirtschaftliche Analyse der Entwicklung der Marktanteile 66

5.4. Zum Problem der Zusammenfassung mehrerer Marken eines Konsumgutes zu Aggregatmarken 68

5.5. Möglichkeiten der Variation akzessorischer Annahmen ... 72

5.5.1. Individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten 72
5.5.2. Individuelle Kaufintervalle 78
5.5.3. Individuelle Kaufquantitäten 83
5.5.4. Im Zeitablauf variierende Übergangswahrscheinlichkeiten 85

5.6. Kleine Modellkritik 88

KAPITEL 3: LERNTHEORETISCH FUNDIERTE ENTSCHEIDUNGSMODELLE ZUR ABSATZPOLITIK VON UNTERNEHMUNGEN

§ 6 Grundlegung 91

6.1. Modellannahmen 91
6.1.1. Die Unternehmung 92
6.1.2. Der Markenwahlprozeß der Haushalte 93

6.2. Übergangsmatrix und Markenpreise 93

6.3. Übergangsmatrix und Werbemaßnahmen 96

§ 7 Entscheidungsmodelle auf der Basis einer MARKOVschen Kette mit diskreter Zeitachse 100

7.1. Variation eines Markenpreises 100
7.1.1. Allgemeine Darstellung des Modells 100
7.1.2. Komparative Betrachtung 103

7.2. Variation der Werbeintensität 104
7.2.1. Allgemeine Darstellung des Modells 104
7.2.2. Komparative Betrachtung 107

§ 8 Entscheidungsmodelle auf der Basis einer MARKOVschen Kette mit stetiger Zeitachse 108

8.1. Variation eines Markenpreises 108
8.1.1. Allgemeine Darstellung des Modells 108
8.1.2. Komparative Betrachtung 110

8.2. Variation der Werbeintensität 111
8.2.1. Allgemeine Darstellung des Modells 111
8.2.2. Komparative Betrachtung 113

8.3. Schlußbemerkung 113

KAPITEL 4: DIE DURCHFÜHRUNG EMPIRISCHER UNTERSUCHUNGEN ZUR PROGNOSE VON MARKTANTEILEN

§ 9 Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und Prüfung von Modellhypothesen 115

9.1. Schätzverfahren für Wahrscheinlichkeiten 115

9.1.1. Relative Häufigkeiten als maximum-likelihood-Schätzungen für Wahl- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten 115

9.1.2. Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten mittels Zustands- statt Übergangshäufigkeiten 120

9.2. Möglichkeiten der statistischen Prüfung von Modellhypothesen 123

9.2.1. Prüfung von Hypothesen über spezielle numerische Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten 123

9.2.2. Prüfung der Hypothese, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf konstant sind 125

9.2.3. Prüfung der Hypothese, daß die MARKOVsche Kette von einer bestimmten vorgegebenen Ordnung ist 127

9.2.4. Einige abschließende Gesichtspunkte zur Hypothesenprüfung bei MARKOV-Modellen zur Markenwahl 129

§ 10 Kritische Beurteilung einiger empirisch ausgerichteter Arbeiten zur Prognose von Marktanteilen 130

10.1. Praktische Beispiele zur Prognose von Marktanteilen 130

10.1.1. Marktanteilsprognosen mittels MARKOVscher Prozesse bei HARDER 130

10.1.2. Eine Untersuchung des englischen Waschmittelmarktes von STYAN und SMITH 132

10.1.3. Eine Untersuchung von TELSER über die Märkte einiger kurzlebiger Konsumgüter in den USA . 133

10.1.4. Die empirischen Untersuchungen von HARARY und LIPSTEIN 135

10.2. Einige empirische Befunde aus der Marktforschung, die für die Beurteilung von Markenwahlvorgängen von Bedeutung sind 137

10.3. Kurze Zusammenfassung 138

KAPITEL 5: ABSCHLIESSENDE WIRTSCHAFTSTHEORETISCHE BEURTEILUNG

§ 11 Erneute Gegenüberstellung lerntheoretischer Modelle zur Markenwahl und traditioneller Verbrauchstheorie 140

11.1. Nochmals zu den Determinanten der Wahlakte der Konsumeinheiten 140

11.2. Nochmals zur Rationalität des Konsumentenverhaltens 142

11.3. Nochmals zur Definition eines Wirtschaftsgutes 144

11.4. Nochmals zum Aggregationsproblem 147

§ 12 Der Begriff des ökonomischen Gleichgewichts im Zusammenhang mit der Markenwahl 148

A n h a n g 152

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s VII

V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als Verwalter einer Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Statistik und ihre Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität München entstanden. Dem Direktor dieses Instituts, Herrn Professor Dr. Hans Kellerer, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Er hat mir Gelegenheit gegeben, diese Arbeit an seinem Institut zu schreiben und mich bei deren Abfassung in großzügiger Weise gefördert. Die Anregung zur Bearbeitung des Themas dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. E. M. Fels. Er hat mich nicht nur bei der Planung der vorliegenden Untersuchung auf viele wesentliche Gesichtspunkte hingewiesen, sondern mir auch bei mehreren Einzelproblemen mit guten Ratschlägen weitergeholfen. Auch ihm sei an dieser Stelle sehr gedankt.

KAPITEL 1: NACHFRAGETHEORETISCHE GRUNDLEGUNG

§ 1 Konsumtheoretische Bestandsaufnahme

1.1. Statische Nachfragetheorien

Die moderne mikroökonomische Konsumtheorie bietet für die wirtschaftstheoretische Durchdringung des Wahlverhaltens der konsumierenden Mikroeinheit unter Sicherheit mehrere alternative, aber wesensverwandte Lösungen an, nämlich die Präferenztheorie, die Nutzen- und Grenznutzentheorie sowie die Theorie der offenbarten Präferenzen. Diese Theorien gehen von der statischen Betrachtungsweise aus. Sie sind auf der Vorstellung rational handelnder Konsumeinheiten (Individuen, Haushalte oder andere Systeme) aufgebaut.

Ausgangspunkt ist jeweils der Gedanke, daß von einer Konsumeinheit H_j ($j=1,2,\ldots,N$) in einer Wirtschaftsperiode angesichts der Menge Ω aller denkbaren, qualitativ und quantitativ exakt festgelegten Güterbündel $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_m)$ unter Berücksichtigung der Preis- und ihrer Einkommenssituation ein bestimmtes ausgewählt wird, wobei in der Regel ein gegebenes Preissystem, außerdem vollständige Konkurrenz auf der Nachfrageseite des Marktes, vorausgesetzt ist.

1.1.1. Die Präferenztheorie

In der Präferenztheorie werden auf der Basis dieser Vorstellung für die Art der Beziehung eines Konsumenten H_j zu der Menge Ω gewisse, von Fall zu Fall beträchtlich variierende Annahmen gemacht. Diese Annahmen werden in älteren Versionen der Präferenztheorie, etwa bei MARSHALL [102,S.83 ff.], PARETO [115,S.156 ff.], SCHULTZ [134,S.5 ff.], HICKS [72,S.11 ff.], teils logisch deduziert, teils empirisch nachgewiesen, in moderneren Fassungen jedoch, beispielsweise bei GEORGESCU-ROEGEN [50,S.518 ff.], DEBREU [28,S.52 ff.], NEWMAN [111,S.10 ff.], in Form von Axiomen postuliert. Die Überlegungen betreffen jeweils eine - in der Regel schwache - haushaltsspezifische Ordnung (die Präferenzordnung) der Menge Ω. Ein Teil der Annahmen, meist einige grundlegendere und weniger restriktive, werden unter dem Begriff der Rationalität des Konsumentenverhaltens zusammengefaßt; axiomatischer

Charakter wird ihnen auch bei den modernen Autoren nicht immer beigemessen.

Folgende Definitionen erklären einige für die moderne Präferenztheorie grundlegende Symbole:

Definition 1: Man schreibt $\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}''$, wenn nach der Einschätzung der j-ten Konsumeinheit das Bündel $\vec{x}'$ mehr Bedürfnisbefriedigung bewirkt als das Bündel $\vec{x}''$ $(\vec{x}', \vec{x}'' \in \Omega)$.

Definition 2: Man schreibt $\vec{x}' \; R_j \; \vec{x}''$, wenn $\neg (\vec{x}'' \; O_j \; \vec{x}')$ ist, d. h. $\vec{x}'' \; O_j \; \vec{x}'$ nicht gilt, wenn also $\vec{x}''$ nach der Beurteilung der j-ten Verbrauchseinheit nicht mehr Bedürfnisbefriedigung ergibt als $\vec{x}'$.

Definition 3: Man schreibt $\vec{x}' \; I_j \; \vec{x}''$, wenn gilt: $\vec{x}' \; R_j \; \vec{x}''$ und $\vec{x}'' \; R_j \; \vec{x}'$, also, unter Berücksichtigung von Definition 2, $\neg (\vec{x}'' \; O_j \; \vec{x}') \; \& \; \neg (\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}'')$, wenn also nach dem Urteil von H_j $\vec{x}'$ und $\vec{x}''$ gleichwertig sind.

Definition 4: $\vec{x}'$ heißt gegenüber $\vec{x}''$ dominant, symbolisch: $\vec{x}' > \vec{x}''$, wenn gilt:

(1) $x_k' \geq x_k''$ für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$

(2) $\vec{x}' \neq \vec{x}''$, d. h., es existiert ein $k \in \{1,\ldots,m\}$ mit $x_k' > x_k''$.

Als Beispiel für ein auf die Präferenztheorie zugeschnittenes Axiomensystem sei das von UZAWA [164,S.134 ff.] genannt. Eine binäre, auf Ω definierte haushaltsspezifische Relation O_j heißt nach der Konstruktion von UZAWA Präferenzrelation, wenn folgende Axiome gelten:

O 1. Axiom der Irreflexivität: Für alle $\vec{x} \in \Omega$ gilt $\neg (\vec{x} \; O_j \; \vec{x})$.

O 2. Axiom der Transitivität: Für alle $\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''' \in \Omega$ mit $\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}''$ und $\vec{x}'' \; O_j \; \vec{x}'''$ gilt $\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}'''$.

O 3. Axiom der Monotonie: Für alle $\vec{x}' > \vec{x}''$ gilt $\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}''$.

O 4. Axiom der Konvexität: Für alle $\vec{x}', \vec{x}''$ mit $\vec{x}' \neq \vec{x}''$ und $\neg (\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}'')$ gilt: $[(1-\lambda)\vec{x}' + \lambda \vec{x}''] \; O_j \; \vec{x}'$ für alle $0 < \lambda < 1$.

O 5. Axiom I der Kontinuität: Für alle $\vec{x}' \in \Omega$ ist die Menge $\{\vec{x} \mid \vec{x} \in \Omega; \; \vec{x}' \; O_j \; \vec{x}\}$ eine offene Menge in Ω.

O 6. Axiom II der Kontinuität: Für alle $\vec{x}' \in \Omega$ ist die Menge $\{\vec{x} \mid \vec{x} \in \Omega; \; \vec{x} \; O_j \; \vec{x}'\}$ eine offene Menge in Ω.

Aus diesem Axiomensystem folgt, daß I_j eine Äquivalenzrelation ist, denn:

(1) Aus O 1 und Definition 3 folgt direkt $\vec{x}\ I_j\ \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \Omega$ (Reflexivität).

(2) Gilt $\vec{x}'\ I_j\ \vec{x}''$, also $\neg\ (\vec{x}'\ O_j\ \vec{x}'') \,\&\, \neg\ (\vec{x}''\ O_j\ \vec{x}')$, so folgt unter Berücksichtigung von Definition 3 sofort: $\vec{x}''\ I_j\ \vec{x}'$ (Symmetrie).

(3) Aus den Beziehungen $\vec{x}'\ I_j\ \vec{x}''$ und $\vec{x}''\ I_j\ \vec{x}'''$, also aus $[\neg\ (\vec{x}'\ O_j\ \vec{x}'') \,\&\, \neg\ (\vec{x}''\ O_j\ \vec{x}')] \,\&\, [\neg\ (\vec{x}''\ O_j\ \vec{x}''') \,\&\, \neg\ (\vec{x}'''\ O_j\ \vec{x}'')]$ folgt unter Berücksichtigung von O 2 $\neg\ (\vec{x}'\ O_j\ \vec{x}''') \,\&\, \neg\ (\vec{x}'''\ O_j\ \vec{x}')$, also $\vec{x}'\ I_j\ \vec{x}'''$ (Transitivität).

Da die Existenz von Elementen $\vec{x}'$, $\vec{x}''$ mit $\vec{x}' \neq \vec{x}''$ und $\vec{x}'\ I_j\ \vec{x}''$ zugelassen ist, ist die Menge Ω mittels der Relation O_j schwach geordnet. Die Annahme einer strengen haushaltsspezifischen Ordnung der Menge Ω ist gelegentlich, z. B. bei SAMUELSON [127] andeutungsweise, in der Literatur zu finden, wurde aber, wohl vor allem unter dem Einfluß der Welfare-Theoretiker und der Argumentation von HICKS [73], mit dem Hinweis auf mangelnde Realitätsnähe aufgegeben.

Die Situation $\vec{s}$, in der sich die Einheit H_j zu Beginn einer Wirtschaftsperiode befindet, wird vom Standpunkt der statischen Theorie aus definiert als der Vektor $\vec{q}$ der - für alle N Konsumeinheiten in gleicher Weise gültigen - Preise, erweitert um den - individuell verschiedenen - Betrag w der Konsumsumme, also ist

$$\vec{s} = (q_1,\ldots,q_k,\ldots,q_m;w) = (\vec{q},w) \quad .$$

Unter Beachtung der Situation $\vec{s}$ einer Einheit kann man als Menge der erreichbaren Güterbündel dieser Einheit eine Teilmenge von Ω, nämlich die Menge $\Omega_{\vec{s}} := \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} \in \Omega;\ \vec{x}.{}^t\vec{q} \leq w \right\}$ angeben; ${}^t\vec{q}$ ist dabei der Spaltenvektor der m Güterpreise.

Die Entscheidung des Haushalts H_j für ein bestimmtes optimales Güterbündel $\vec{x}_{oj}$ ist dann gegeben durch folgende Bedingungen:

(1) $\vec{x}_{oj} \in \Omega_{\vec{s}}$

(2) $\vec{x}_{oj}\ O_j\ \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \Omega_{\vec{s}}$ mit $\vec{x} \neq \vec{x}_{oj}$.

Die von der Präferenzrelation O_j abzuleitende Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s}) =$

$= (h_{1j}(\vec{s}),\ldots,h_{kj}(\vec{s}),\ldots,h_{mj}(\vec{s}))$, also die individuelle generelle Nachfragefunktion in der Terminologie SCHNEIDERs [133,S.47], gibt für jede Situation $\vec{s} = (\vec{q},w)$ das unter Beachtung von O_j optimale Güterbündel an.

Rationalität des Konsumentenverhaltens liegt nach UZAWA [164,S.129] dann vor, wenn

(1) O_j eine vollständige Ordnung von Ω darstellt;

(2) die Einheit die unter Berücksichtigung ihrer Situation optimale Gütermengenkombination auswählt.

Bei NEWMAN [111,S.17] wird die Rationalität des Konsumentenverhaltens mittels dreier Axiome definiert, die im wesentlichen mit diesen beiden Annahmen und dem Axiom O 2 identifiziert werden können.

Die Präferenztheorie leitet also aus Annahmen über die Rationalität des entscheidenden Konsumenten und über Eigenschaften der Praferenzrelation O_j die Wahlfunktion $\vec{h}_j$ ab, die in Abhängigkeit von der Situation $\vec{s}$ der Einheit H_j das für diese optimale Güterbündel $\vec{x}_{oj}$ qualitativ und quantitativ bestimmt.

1.1.2. Die Nutzentheorie

Die Beziehung zwischen der Konsumeinheit H_j und der Menge Ω wird bei dieser Variante der Konsumtheorie nicht mittels einer Ordnung O_j der Menge Ω, sondern durch eine auf Ω definierte Funktion $u_j(\vec{x})$ zum Ausdruck gebracht, über deren Eigenschaften dann gewisse Annahmen festgelegt werden. Diese Funktion heißt Nutzenfunktion. Nutzen wird dabei - allerdings durchaus uneinheitlich - definiert als quantitativer Ausdruck für die Wertschätzung alternativer, art- und mengenmäßig genau bestimmter Güterbündel durch eine Konsumeinheit (vgl. z. B. SLUTZKY [142,S.88]; DEBREU [28,S.55 ff.]), oder als von der Verbrauchseinheit "produziertes" Gut nullter Ordnung (VON STACKELBERG [145,S.124 ff.]). Die schon früh erkannte mangelnde quantitative Faßbarkeit des Nutzens führte zu einer Konzentration der nutzentheoretischen Überlegungen auf den Begriff des Grenznutzens (vgl. z. B. MENGER [104,S.118 ff.]; FRISCH [49]) und auf lexikographische Nutzenfunktionen (HAUSNER [64]; THRALL [158]; CHIPMAN [22]).

Ein erster Versuch, die Funktion u_j näher zu beschreiben, war die Annahme JEVONS' [80,S.36 ff.], die Nutzenfunktion sei darstellbar als die Summe der Nutzen u_{kj} der einzelnen Komponenten von $\vec{x}$, also:

$$u_j(\vec{x}) = u_{1j}(x_1) + \ldots + u_{kj}(x_k) + \ldots + u_{mj}(x_m)$$

Diese Annahme eines unabhängigen Nutzens wurde bereits von EDGEWORTH [31,S.7] widerlegt und vermöge der Erkenntnis, der Nutzen einer bestimmten Menge eines bestimmten Gutes sei von der Gesamt-Versorgungslage der Haushalte abhängig, inzwischen nicht mehr ernsthaft vertreten.

SLUTZKY [142,S.89] formulierte bezüglich der Eigenschaften der Funktion $u_j(\vec{x})$ einige wenig restriktive Annahmen, die in den meisten nutzentheoretischen Ansätzen vorausgesetzt sind:

(1) Die Annahme der zweimaligen Differenzierbarkeit der Funktion u_j;
(2) die Konstanz der Nutzenfunktion im Verlauf der Betrachtungsperiode;
(3) die Annahme, daß ein Nutzenzuwachs beim Übergang von einer Gütermengenkombination zu einer anderen nicht von der Art des Überganges abhängig ist.

Es wird hier also nicht einmal das Gesetz des abnehmenden Grenznutzens, das bekannte Erste GOSSENsche Gesetz, postuliert.

Rationales Verhalten der j-ten Konsumeinheit liegt dann vor, wenn sie unter der für sie gegebenen Situation $\vec{s} = (q_1,\ldots,q_k,\ldots,q_m;w)$ das Güterbündel $\vec{x}_{oj}$ auswählt, das ihren Nutzen maximiert, also wenn

$$u_j(\vec{x}) = \max. \qquad \text{unter der Nebenbedingung}$$
$$\vec{x}.\,t\vec{q} \leq w$$

für $\vec{x}_{oj}$ richtig ist. Unter Verwendung der LAGRANGEschen Multiplikatorenmethode ergibt sich hieraus (vgl. z. B. SAMUELSON [127,S.98 und S.362 ff.]; WOLD [171,S.84]) direkt das Gleichungssystem

$$u'_{kj} + Lq_k = 0 \qquad (k \in \{1,\ldots,m\})$$

mit L als unbestimmtem Multiplikator und $u'_{kj} := \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ als partiellem Grenznutzen für die Einheit H_j in bezug auf das Wirtschaftsgut K_k

$(k \in \{1,\ldots,m\})$. Es folgen aus diesem System von m Gleichungen sofort die äquivalenten Bedingungen

$$\frac{u'_{kj}}{u'_{ij}} = \frac{q_k}{q_i} \qquad (i,k \in \{1,\ldots,m\}) \quad \text{und}$$

$$\frac{u'_{1j}}{q_1} = \ldots = \frac{u'_{kj}}{q_k} = \ldots = \frac{u'_{mj}}{q_m} = -L \quad ,$$

also die Gleichgewichtsbedingungen für die Konsumeinheit H_j, die als Varianten des Zweiten GOSSENschen Gesetzes bekannt sind und deren objektive empirische Relevanz insbesondere durch VON STACKELBERG [145, S.123 ff.] nachgewiesen wurde.

Aus der Form dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich, daß sie invariant ist bezüglich der Wahl alternativer Nutzenindizes; lediglich die Größe -L, der sogenannte Grenznutzen des Geldes, ist bei verschiedenen Nutzenindizierungen verschieden. Daraus wurde gefolgert (z. B. HICKS [73,S.8/9]; SAMUELSON [127,S.91]), daß ein kardinaler Nutzenbegriff für die Nutzentheorie entbehrlich ist und deshalb, auch im Hinblick auf die fehlende empirische Nachweisbarkeit des numerischen Nutzens (vgl. z. B. VON STACKELBERG [145,S.115], allerdings auch WALLIS und FRIEDMAN [169]; MOSTELLER und NOGEE [109]) abgelehnt werden muß. Der kardinale Nutzen trat jedoch in jüngerer Zeit im Verfolg der (später kurz zu besprechenden) spieltheoretischen Ansätze VON NEUMANNs und MORGENSTERNs [110] in modifizierter Form wieder in den Vordergrund.

Die nahe Beziehung zwischen dem dogmengeschichtlich älteren nutzentheoretischen und dem präferenztheoretischen Ansatz in der Konsumtheorie ist offensichtlich. Man kann sagen:

(1) Liegt eine vollständige haushaltsspezifische Präferenzordnung O_j einer Menge Ω vor, so existiert, allerdings nur unter gewissen, von DEBREU [27] näher untersuchten und nicht besonders einschneidenden Voraussetzungen, eine reellwertige Funktion auf Ω, die diese Ordnung repräsentiert. Für eine solche Funktion u_j muß bezüglich der Relation O_j nur die Bedingung gelten: $u_j(\vec{x}') > u_j(\vec{x}'')$ für alle $\vec{x}'$, $\vec{x}''$ mit $\vec{x}' \; O_j \; \vec{x}''$. Eine Präferenzrelation O_j auf Ω kann also stets durch unendlich viele Nutzenfunktionen u_j repräsentiert werden (vgl. BUSHAW

und CLOWER [17,S.111]).

(2) Durch eine auf Ω definierte Nutzenfunktion $u_j(\vec{x})$ wird dagegen (vgl. HICKS und ALLEN [71,S.118]; CHIPMAN [22,S.215 ff.]) eine Präferenzrelation O_j eindeutig festgelegt.

Die Nutzentheorie unterscheidet sich also von der Präferenztheorie dadurch, daß sie für eine Konsumeinheit H_j angesichts der Menge aller möglichen Güterbündel nicht nur die Existenz einer Präferenzordnung fordert, sondern sich auch um deren Herleitung aus einer meßbaren Größe, dem sogenannten Nutzen, befaßt. Sie ist also zusätzlich belastet mit dem nicht generell lösbaren Problem des Nutzenbegriffs allgemein und speziell dem der Meßbarkeit des Nutzens. Dafür ergibt sich aus ihr die Möglichkeit, die Wahlhandlungen der Konsumeinheit mit Hilfe des zumindest für die ältere Wirtschaftstheorie typischen Maximierungsprinzips zu erklären.

Die Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ als - zumindest vorläufiges - Ziel jedes konsumtheoretischen Ansatzes wird in analoger Weise wie bei der Präferenztheorie definiert. Sie gibt für alternative Situationen $\vec{s}$ das Güterbündel $\vec{x}_{oj}$ an, für das gilt:

$$(1)\quad \vec{x}_{oj} \in \Omega_{\vec{s}} = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} \in \Omega \;;\; \vec{x}.\,{}^{t}\vec{q} \leq w \right\}$$

$$(2)\quad u_j(\vec{x}_{oj}) > u_j(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in \Omega_{\vec{s}} \quad \text{mit } \vec{x} \neq \vec{x}_{oj} \;.$$

1.1.3. Die Theorie der offenbarten Präferenzen

Die Präferenztheorie umgeht zwar das Problem, auf welche Art und Weise Präferenzen entstehen, mit der sich die Nutzentheorie noch befaßte, weiß aber keine Antwort auf die Frage, wie denn solche - im wesentlichen nur psychologisch begründbare - Präferenzrelationen empirisch ermittelt werden könnten. Es liegt daher nahe, auch auf die Vorstellung einer Präferenzordnung in der Nachfragetheorie zu verzichten und das Wahlverhalten der Konsumeinheiten wirtschaftstheoretisch direkt an Hand der individuellen Nachfragefunktionen zu beurteilen, die als Ergebnis der Wahlakte empirisch leicht feststellbar sind. Tatsächlich haben schon CASSEL [19,S.65 ff.] und VON STACKELBERG [144,S.459 ff.] nachgewiesen, daß die Nachfragefunktion und die Präferenzrelation als Ausgangspunkte der Nachfragetheorie gleichwertig sind.

Deshalb sind, aufbauend auf den grundsätzlichen Erörterungen SAMUELSONs (vgl. z.B. [127,S.107-116; 146-165]), WOLDs [1[illegible],S.65 ff.] und HICKS' [73] Axiomensysteme konstruiert worden, die sich nicht auf Eigenschaften der Präferenzrelation C_j, sondern direkt der Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ beziehen. Das von UZAWA zur Theorie der offenbarten Präferenzen entwickelte System von Axiomen geht aus von einem grundlegenden Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens, dessen schwächere SAMUELSONsche (vgl. [126,S.65 ff.]) Variante folgendermaßen lautet:

Schwaches Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens: Sind unter den Bedingungen einer Situation $\vec{s}'$ die Güterbündel $\vec{x}'$ und $\vec{x}''$ in $\Omega_{\vec{s}'}$ enthalten und wurde $\vec{x}'$ dem Bündel $\vec{x}''$ vorgezogen, dann muß für die Situation $\vec{s}''$, in der das Bündel $\vec{x}''$ gewählt wird, gelten: $\vec{x}' \in \Omega_{\vec{s}''}$.

Etwas stärker als dieses Axiom ist das auf HOUTHAKKER [75,S.141] zurückgehende sogenannte Starke Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens:

Starkes Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens: Wird aus einer endlichen Folge von Güterbündeln $\vec{x}', \vec{x}'', \ldots, \vec{x}^{(j)}, \ldots, \vec{x}^{(y)}$ von einem Haushalt jedes Güterbündel $\vec{x}^{(j)}$ seinem direkten Nachfolger $\vec{x}^{(j+1)}$ vorgezogen, dann wird das Güterbündel $\vec{x}^{(y)}$ dem Güterbündel $\vec{x}'$ nicht vorgezogen.

Für die haushaltsspezifische Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ werden von UZAWA [164,S.132] folgende Eigenschaften postuliert:

C 1. Die Funktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ stellt ein Güterbündel aus Ω dar und ist definiert für alle $\vec{s} = (\vec{q}, w)$ mit $w > 0$.

C 2. Für jedes $\vec{x} \in \Omega$ existiert eine Situation $\vec{s}$, in der es ausgewählt wird.

C 3. Der Vektor $\vec{h}_j(\vec{s})$ genügt der Bedingung $\vec{x} \cdot \vec{q} = w$ für $w > 0$ und positive Güterpreise.

C 4. Die Komponenten $h_{kj}(\vec{s})$ der Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ genügen der LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich positiver Konsumsummen w, d.h. für alle $\vec{s} = (\vec{q}, w)$ mit $w > 0$ existiert, falls $\varepsilon > 0$ gilt, ein κ derart, daß $|h_{kj}(\vec{q}, w') - h_{kj}(\vec{q}, w)| \leq \kappa |w' - w|$ für alle w' mit $|w - w'| < \varepsilon$ richtig ist (vgl. z.B. SMIRNOV [143 II,S.137]).

Für die Frage, ob und in welcher Weise ein System von Annahmen, das auf der Theorie der offenbarten Präferenzen aufgebaut ist, einem Axiomensystem auf der Basis der Präferenztheorie äquivalent ist, liegen Untersuchungen vor. Bei NEWMAN [111] werden zwei Axiomensysteme einander gegenübergestellt und deren Äquivalenz [111,S.150 ff.] verbal erläutert. Bezüglich der hier dargestellten alternativen Axiomensysteme von UZAWA ergeben sich unter anderem folgende Beziehungen (vgl. hierzu die Beweise in [164,S.135 ff.]):

(1) Gelten für eine Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$ die Axiome C 1 bis C 4 sowie das HOUTHAKKERsche Starke Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens, dann kann genau eine Präferenzrelation O_j auf der Menge Ω_o aller positiven Güterbündel gefunden werden, die die Axiome O 1 bis O 5 erfüllt.

(2) Gelten für eine Präferenzrelation O_j auf der Menge Ω'_o aller nichtnegativen Güterbündel die Axiome O 1 bis O 6, dann existiert eine Wahlfunktion $\vec{h}_j(\vec{s})$, die von der Relation O_j abgeleitet ist und für die die Axiome C 1 bis C 3 sowie das Starke Axiom rationalen Konsumenten-Wahlverhaltens gelten.

Es besteht also die Möglichkeit, Annahmen, die auf der Präferenztheorie beruhen, aus Axiomen über das Wahlverhalten und die Wahlfunktion abzuleiten und umgekehrt, ohne daß irgendwelche zusätzlichen Hypothesen benötigt werden. Die beiden Ansätze sind also bei entsprechenden Axiomensystemen pragmatisch äquivalent.

Die Theorie der offenbarten Präferenzen hat gegenüber der Präferenztheorie und der Nutzentheorie den Vorzug, daß sie auf keine empirisch nicht begründbare Annahmen bezüglich der Wertschätzung von Konsumeinheiten angesichts hypothetischer alternativer Güterbündel zurückgreifen muß. Die Wahlfunktion und ihre Eigenschaften werden vielmehr direkt postuliert.

1.1.4. Spieltheoretische Ansätze in der Nachfragetheorie

Die bisher dargestellten Varianten der mikroökonomischen volkswirtschaftlichen Nachfragetheorie gehen von der Annahme aus, daß die Wahlakte der Konsumeinheiten unter Sicherheit erfolgen. Das heißt (vgl. z.B. MARSCHAK [101,S.113]), daß die Werte aller die Konsumentenentscheidung beeinflussenden Variablen als dem Entscheidungsträger nicht

nur bezüglich ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilungen, sondern mit ihrer tatsächlichen Größe bekannt vorausgesetzt werden. Alle in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeiten betragen also null oder eins.

Liegt keine Sicherheit[1)] vor für die Wahlsituation der Konsumenten, so unterscheidet man in der Wirtschaftstheorie folgende Unterfälle (vgl. z.B. MARSCHAK [101,S.113]):

(1) Die Situation der vollständigen Information, das heißt, der Entscheidungsträger kennt zwar nicht den tatsächlichen Wert der in die Entscheidung eingehenden Variablen, aber deren objektive Wahrscheinlichkeitsverteilung; Sicherheit kann bei dieser Definition als Spezialfall der vollständigen Information aufgefaßt werden; gelegentlich wird für den Fall der Unsicherheit bei vollständiger Information die Bezeichnung Risiko verwendet;

(2) die Situation der unvollständigen Information, das heißt, weder die tatsächlichen Werte der in die Entscheidung eingehenden Variablen noch deren objektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind bekannt.

Die auf die Situation der vollständigen Information ausgerichtete Spieltheorie VON NEUMANNs und MORGENSTERNs [110] ergab für die Nachfragetheorie einige grundlegend neue Aspekte, die zunächst die Meßbarkeit des Nutzens, aber auch das Verhalten der Entscheidungseinheiten in Spielsituationen betreffen.

Tatsächlich ist es möglich, bei entsprechenden, auf spieltheoretischem Ansatz aufgebauten Axiomensystemen (vgl. z.B. VON NEUMANN und MORGENSTERN [110], MARSCHAK [101], HERSTEIN und MILNOR [70], HENDERSON und QUANDT [68], SUPPES und WINET [153]) eine numerische Nutzenfunktion abzuleiten, die eindeutig ist bis auf positive lineare Transformationen. Die Herleitung ist grundsätzlich verschieden von der Bestimmung kardinaler Nutzenfunktionen auf dem Wege der Nutzendifferenzmessung durch die klassischen Nutzenkardinalisten (vgl. hierzu KRELLE [90,S.139 ff.] und die dort angegebene Literatur).

---

1) Definitorische Probleme im Zusammenhang mit den Begriffen Sicherheit, Risiko und Unsicherheit, vollständige und unvollständige Information, können hier nicht behandelt werden; vgl. z.B. HAAS [58, S.11 ff.].

Für die theoretische Beurteilung der Wahlakte der Konsumeinheiten, also der Individuen oder Haushalte, liefert die Spieltheorie einen grundlegend neuen Ansatz, obwohl von einer umfassenden Lösung des Marktproblems mit einer allgemeinen Anzahl von Verkäufern und Käufern noch nicht die Rede sein kann (vgl. VON NEUMANN und MORGENSTERN [110, S.606 ff.], allerdings auch AUMANN [5] und [6]). Die Wahlakte werden als Spiele der wählenden Konsumeinheit gegenüber der Angebotsseite aufgefaßt. Bei der typischen Situation für den Konsumenten gegebener und durch ihn nicht beeinflußbarer Preise und Einkommen entfällt jedoch ein Einbezug möglicher alternativer Strategien der Marktgegenseite in die einzelnen Wahlüberlegungen. Die Ungewißheit beschränkt sich vor allem auf Güterqualitäten in einem weiteren Sinn, also auf eine Unsicherheit der Nutzenvorstellung, die man von einem Wirtschaftsgut hat (vgl. hierzu das Einführungsbeispiel bei SAVAGE [130, S.107 ff.]). Sind diese Güterqualitäten der Konsumeinheit auf Grund früherer Wahlakte bekannt, so liegt für sie keine eigentliche Spielsituation vor. Die Strategie des Konsumenten ist dann mit dem Begriff der Nutzenmaximierung beschrieben.

Ausnahmen sind dann vorhanden, wenn auf der Nachfrageseite des Marktes eine monopolistische oder oligopolistische Struktur, also eine für originäre Nachfrage selten vorhandene Situation, gegeben ist.

1.2. Dynamische Nachfragetheorien

Unter Berufung auf die grundlegenden begrifflichen Überlegungen SAMUELSONs [127,S.311 ff.], MARSCHAKs [101,S.32 ff.] und SCHNEIDERs [133,S.262 ff.] kann man eine Theorie als dynamisch definieren, bei der

(1) entweder mindestens eine der in das Modell eingehenden Variablen auf verschiedene Zeiträume oder Zeitpunkte bezogen ist; zeitbezogene Differenzbildungen, Ableitungen nach der Zeit und Integrationen über die Zeit gehören ebenfalls hierher;

(2) oder mindestens eine Variable zeitabhängig betrachtet wird.

Die bisher besprochenen Theorien des Haushalts sind unter Berücksichtigung dieser Definition, wie schon festgestellt wurde, statisch, weil ausschließlich Variablen berücksichtigt werden, die ein und der-

selben Periode zugeordnet sind. Dynamische Theorien der individuellen Nachfrage sind in der Literatur nur spärlich vertreten (vgl. allerdings ROOS [124]). Die theoretischen Ansätze beschränken sich im allgemeinen auf Dynamisierungen der Nachfragefunktion; speziell werden auch dynamische Abhängigkeiten der Wahlakte einer Konsumeinheit von Wahlhandlungen anderer Konsumeinheiten untersucht; die Frage der Rationalität des Konsumentenverhaltens wird dagegen nur selten einer dynamischen Analyse unterzogen.

1.2.1. Dynamische Nachfragefunktionen

Ausgangsgesichtspunkt bei der dynamischen Betrachtung von individuellen Nachfragefunktionen ohne Berücksichtigung von Interdependenzen der Wahlakte verschiedener Konsumeinheiten ist die Hypothese, daß die Wahlakte der Einheiten nicht nur von den Preisen und dem Einkommen der gegenwärtigen Periode, sondern auch von der Situation in vergangenen Perioden und von erwarteten Preis- und Einkommensentwicklungen für die Zukunft abhängig sind.

So kann man beispielsweise bei WOLD [171, S.[illegible]] und ROOS [144] ausdrücklich auf die Abhängigkeit der individuellen Nachfragefunktion von Einkommensänderungen im Zeitablauf finden, KEPPLER [66, S.[illegible] ff.] und SCHNEIDER [133, S.35 ff.] dagegen legen das Schwergewicht ihrer dynamischen Betrachtungen zur individuellen Nachfragefunktion auf die Berücksichtigung der Preise zurückliegender Perioden sowie erwarteter Preistendenzen.

Man kann die Dynamisierungen der individuellen Nachfragefunktion unter Verwendung des Begriffes der Situation der Konsumeinheit, die als ein Vektor mit m-1 Komponenten auffaßbar ist, folgendermaßen zusammenfassend darstellen:

(1) Für den sogenannten diskontinuierlichen Fall, also die Einteilung der Zeitachse in einzelne Perioden, ergibt sich bei dynamischer Betrachtungsweise und Einführung von Zeitindices folgende generelle mikroökonomische Nachfragefunktion in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{n}_j[t] = (n_{1j}[t],\ldots,n_{kj}[t],\ldots,n_{mj}[t]) = \vec{n}_j[t](\vec{s}[t],\vec{s}[t-1],\ldots,\vec{s}[t-T])$$

(T ist die Anzahl der berücksichtigten zurückliegenden Perioden)

(2) Für den kontinuierlichen Fall, bei dem die Zeit nicht periodisiert ist, ergibt sich:

$$\vec{h}_j[t] = \vec{h}_j(\vec{s}(t); \frac{d\vec{s}(t)}{dt})$$

d. h., die Wahl der Konsumeinheit zum Zeitpunkt t, die sogenannte Momentannachfrage, ist abhängig von der Preis- und Einkommenssituation der Konsumeinheit H_j im Zeitpunkt t und von der zeitbezogenen Preis- und Einkommensentwicklung in diesem Zeitpunkt.

Kompliziertere, insbesondere gemischte Ansätze sind möglich, sollen hier aber nicht zur Sprache kommen.

Durch die Arbeiten DUESENBERRYs [30] sowie MODIGLIANIs und BRUMBERGs [106] ist in der Theorie der individuellen Nachfrage ein neues Problem in den Vordergrund gerückt worden, nämlich das Problem der Abhängigkeit der individuellen Wahlakte von den Wahlakten anderer Konsumeinheiten, die sogenannte Interdependenz der Präferenzen.

Für die statische Beurteilung dieses Problems sind in der Literatur vielerlei auf primär soziologisch orientierten Hypothesen aufgebaute Ansätze nachweisbar (vgl. hierzu BÖSSMANN [11,S.42] und die dort angegebenen Quellen). Jedoch ist es nicht realistisch, anzunehmen, daß ein Konsument seine Präferenzen bzw. Käufe an den Wahlakten anderer Konsumenten ausrichtet, die in derselben Periode erfolgen. Man muß deshalb der Annahme von JAMES und BECKERMAN [78], die auch bei DUESENBERRY [30,S.13] im Ansatz zu finden ist, nämlich der Annahme der Abhängigkeit der Wahlakte einer Konsumeinheit für die Periode t von den Wahlhandlungen anderer Einheiten in den Perioden t-1,t-2,..., größere Realitätsnähe beimessen.

Allerdings entstehen bei der Berücksichtigung von Interdependenzeffekten bei der Theorie der individuellen Nachfrage mehrere prinzipielle Schwierigkeiten, vor allem die Vielfalt der möglichen speziellen Abhängigkeitsformen der Wahlakte eines Konsumenten von den Käufen anderer, sowie die Frage, ob die Informationsgewinnung der Konsumenten über die Konsumtionen anderer nicht primär auf dem Wege über die Werbung, also von der Angebotsseite her, erfolge (vgl. BÖSSMANN [11,S. 49/50]). Daraus wurde gefolgert, daß eine explizite ökonometrische Berücksichtigung von Interdependenzphänomenen bei Wahlakten nicht

sinnvoll sei (FELS [39,S.78]).

1.2.2. Dynamische Betrachtung der Rationalität des Konsumentenverhaltens

Das Prinzip der Nutzenmaximierung und die anderen, auf statischen Überlegungen beruhenden Charakterisierungen des Konsumentenverhaltens sind für eine dynamische Theorie unbrauchbar, weil bei dynamischen Betrachtungen der Informationsstand der wählenden Konsumeinheit von wesentlicher Bedeutung ist und die Konsequenzen von Entscheidungen sowie deren Interdependenzen im Zeitablauf berücksichtigt werden müssen (vgl. BÖSSMANN [11,S.54]). Die Mehrzahl der Lösungsansätze für eine Erweiterung des Begriffes ökonomischen Rationalverhaltens konzentriert sich auf die Definition von Erwartungsgrößen, die (z.B. TINTNER [159], [160], [162]) von der Konsumeinheit maximiert werden, oder auf Formulierungen von Minimax-Kalkülen im Sinne der Spieltheorie (z.B. WALD [168]). Ungeklärt ist jedoch die Frage, ob und inwieweit das Präferenzsystem selbst (oder die Nutzenvorstellung oder das Nachfrageverhalten) der Konsumeinheit zeitablaufbedingten Änderungen ausgesetzt ist (vgl. hierzu die Bemerkungen von HAHN und MATTHEWS [59,S.66 ff.]). Sie wird beispielsweise von GEORGESCU-ROEGEN [51] und KRELLE [90,S.117] bejaht. Insbesondere ist man sich weitgehend auch darüber einig, daß Änderungen der Preis- und Einkommenssituation des Haushalts (vgl. z.B. STIGLER [149]) und Käufe von Gebrauchsgütern (RITTIG [122,S.227]) das individuelle Präferenzsystem ändern. Weitere Erklärungen sind allerdings kaum von der Wirtschaftstheorie, sondern eher von der Psychologie und Soziologie zu erwarten.

Durchaus möglich ist allerdings auch die Annahme, daß Präferenzen im Zeitablauf ziemlich konstant sind und nur längerfristigen Wandlungen unterliegen, sich jedoch bei unterschiedlichem Informationsstand der Konsumeinheit unterschiedlich äußern. Die generell nicht bestrittene Nicht-Umkehrbarkeit individueller Nachfragefunktionen (vgl. z.B. GEORGESCU-ROEGEN [51,S.134]) wäre dann nicht mittels Präferenzänderungen, sondern Änderungen des Informationsstandes der Haushalte im Zeitablauf bei grundsätzlich konstanten Präferenzen erklärbar.

§ 2 Einige ungeklärte Fragen

Nach allgemeiner Anschauung sind Diagnose und Prognose die beiden Hauptziele der ökonomischen Theorienbildung (vgl. z.B. HENDERSON und QUANDT [68,S.1 ff.]), die nicht allein durch logisch-theoretische Deduktionen, sondern nur durch ein Zusammenspiel von Theorie und ökonometrisch-empirischer Verifikation und Messung zu erreichen sind. Die Wirtschaftstheorie - wenn auch nicht ausschließlich sie (vgl. KLEIN [87,S.1]) - liefert die Hypothesen für ökonometrische Ansätze, ökonometrische Befunde wirken umgekehrt zurück auf die Theorie (vgl. TINTNER [161,S.3 ff.]).

Inwieweit die im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Konsumtheorie in der Lage ist, relevante Hypothesen für empirisch-ökonometrische Untersuchungen zu liefern, soll jetzt untersucht werden. Vollständigkeit der Darstellung ist nicht beabsichtigt, es sollen nur einige ausgewählte - und für den weiteren Fortgang dieser Arbeit wesentliche - Gesichtspunkte herausgestellt werden.

2.1. Präferenzen, individuelles Einkommen und Preise als Determinanten der Wahlakte der Konsumeinheiten

Die - sicherlich knappe und durchaus nicht vollständige - Bestandsaufnahme konsumwirtschaftlicher Theorienbildung des vorhergehenden Paragraphen hat gezeigt, daß Präferenzen sowie Einkommens- und Preisverhältnisse als Motive für die Konsumgutwahl Vorrang genießen. Zwar wird durchaus nicht verkannt - zumindest in neueren Lehrbüchern der Verbrauchstheorie - , daß schon bei der Frage, welches Einkommen, welche Preise denn die Wahlakte beeinflussen, etwa früheres Einkommen, erwartetes Einkommen, jetziges Einkommen; Geld- oder Realeinkommen, oder: frühere, jetzige oder erwartete Preise, beträchtliche Schwierigkeiten theoretischer, insbesondere auch definitorischer Art entstehen. Grundsätzlich wird aber an der Schlüsselstellung von Einkommen und Preisen bei der Motivation von Wahlakten nicht gezweifelt. Die Frage, wie die Vielfalt der möglichen Preis- und Einkommensabhängigkeiten bezüglich Definition und Zeitbezogenheit der Argumentstellen der individuellen Nachfragefunktion ökonometrisch bewältigt werden kann, hat bislang jedoch eine sehr pessimistische Beantwortung erfahren. Die bisher veröffentlichten Arbeiten zur Ökonometrie der Nachfrage (vgl. etwa den

Überblick bei PFINTNER [161,S.36 ff.] oder FERBER [44] und die dort angegebene Literatur) enthalten kaum Beispiele für eine explizite ökonometrische Berücksichtigung erwarteter oder zurückliegenden Perioden angehöriger Preis- und Einkommensgrößen, sind also nicht einmal umfassend bezüglich der Erfassung von Kaufmotiven aus der Sphäre der Einkommen und Preise. Sie können es auch gar nicht sein, weil dynamische Relationen schon in diesem Bereich so vielfältig sind, daß das Vornehmen, sie wenigstens einigermaßen empirisch zu erfassen, von vornherein aussichtslos erscheint. Der statischen ökonometrischen Analyse der Nachfrage in Abhängigkeit von Preisen und Einkommen wird daher der Vorzug gegeben (vgl. z.B. KRELLE [90,S.540]).

Zu der Vielfalt möglicher Preis- und Einkommenseinflüsse auf Wahlakte der Konsumeinheit kommen zusätzlich noch zahllose andere interne, also in der Struktur der Konsumeinheit begründete Einflußfaktoren wirtschaftlicher, soziologischer und psychologischer Natur, die, je nach theoretischem Standpunkt, die Präferenzstruktur unverändert lassen oder zu ihrer Klärung oder Modifikation beitragen. Ihre theoretische Formulierung hat sich meist im Verfolg kritischer Analysen der nur-einkommens- und -preisbezogenen Konsumtheorie ergeben. Diese Faktoren aufzuzählen ist hier nicht notwendig (vgl. die vollständige Zusammenstellung bei FELS [39,S.9]). Eine Erweiterung des Begriffes der Situation durch zusätzliche Determinanten der Wahlakte, also - in der Terminologie SCHNEIDERs - eine weitere Generalisierung der Nachfragefunktion und damit die Vervollständigung des Vektors $\vec{s}$ durch weitere Komponenten, brächte weitere Probleme zum Vorschein, etwa die Fragen:

(1) Welche und wieviele zusätzliche Variablen sollen in die mathematische Formulierung der individuellen Nachfragefunktion zusätzlich einbezogen werden? Außer internen Faktoren bietet sich eine ganze Anzahl externer, also markt- und insbesondere angebotsbezogener Faktoren an, etwa die absatzpolitischen Instrumente der Angebotsseite neben der Preispolitik, also Werbung, Absatzmethode, Produktgestaltung (vgl. die Einteilung bei GUTENBERG [57,S.123 ff.] oder eine feinere Aufgliederung von NIESCHLAG [112,S.552]). Die Frage, wo man mit der Einbeziehung von Motiven aufhören dürfe, kann nicht beantwortet werden angesichts der unübersichtlichen Vielfalt möglicher Motivationen. Eine festgelegte und theoretisch nachweisbare Anzahl von Variablen, die die individuellen Wahlakte bestimmen, existiert grundsätzlich nicht (FELS [39,S.9]).

(2) Viele verbal festgestellte Determinanten der individuellen Wahlakte - beispielsweise der Einfluß der Käufe von Konsumeinheiten auf Wahlakte anderer Konsumenten (vgl. Abschnitt 1.2.1.,S.13) - erfordern eine Überführung in eine Metrik, sollen sie in einer erweiterten individuellen Nachfragefunktion explizit berücksichtigt werden können (vgl. FELS [39,S.11 ff.]). Kann eine solche Metrik überhaupt, wenn ja, auf welche Art und Weise, in allen Fällen gefunden werden? Für viele Einflüsse wird, das kann man ohne exakte Analyse von vornherein feststellen, diese Frage negativ beantwortet werden müssen.

(3) Durch welche Art von Abhängigkeit soll ein Motiv explizite Berücksichtigung finden? Man kann mögliche Kaufmotive technisch auf verschiedenste Art und Weise erfassen, etwa die Produktwerbung der Angebotsseite durch explizite Berücksichtigung der irgendwie metrisch umgedeuteten Werbemaßnahme selbst oder aber der Haltung der Konsumeinheit zur Werbung überhaupt oder zu der speziellen Werbemaßnahme. Die Unterscheidung zwischen operationellen und attitudinalen Funktionen (FELS [39, S.22]) wurde bisher nicht in der dem Problem angemessenen Intensität diskutiert.

Weitere einschlägige Fragen kritischer Tönung sind leicht zu formulieren. Die Schlußfolgerung ist jetzt schon offensichtlich: Es hat keinen Sinn, durch zusätzliche Berücksichtigung von nachfragedeterminierenden Motiven die Konsumtheorie vervollständigen und von der Ökonometrie fordern zu wollen, viele, möglichst alle Motive bei empirischen Nachfrageanalysen zu berücksichtigen.

Diese These erfährt von ganz anderer Seite eine einigermaßen verblüffende Bestätigung. Eine neuere kritische Analyse der Leistungsfähigkeit empirischer Nachfrageanalysen bezüglich Vorausschätzung zukünftiger Nachfragegrößen (SCHUPACK [135]) kommt gleich zu Beginn (S.552) zu der deprimierenden Erkenntnis, daß die Nachfragetheorie für empirisch-ökonometrische Zwecke fast völlig unergiebig ist. Im weiteren Verlauf der Untersuchung wird eine ganze Anzahl mehr oder weniger komplizierter ökonometrischer Ansätze mittels statistischer Tests bezüglich Prognosegenauigkeit verglichen. Die - sicherlich gewissen methodischen Einwänden ausgesetzte, aber dennoch recht vorsichtige - Arbeit erbringt, auf einen Nenner gebracht, den Nachweis, daß die einfacheren Prognoseverfahren bezüglich Voraussagegenauigkeit komplizierteren und damit in irgendwelcher Weise konsumtheoretisch richtigeren Ansätzen im allge-

meinen überlegen sind.

2.2. Die Rationalität des Konsumentenverhaltens

Der Begriff der Rationalität des Konsumenten-Wahlverhaltens, im ursprünglichen Sinn der statischen Konsumtheorie zwar auf verschiedene Art und Weise, aber exakt festlegbar, erweist sich schon beim Übergang zu dynamischen Betrachtungen als schillernd (vgl. Abschnitt 1.2.2., S.14). Bei näherem Zusehen ergeben sich weitere Probleme, die in der herkömmlichen Konsumtheorie keine Berücksichtigung finden, vor allem die Teilfragen, ob es richtig sei, überhaupt

(1) von der Konsumeinheit, also dem Haushalt als Entscheidungseinheit auszugehen;

(2) der Verbrauchseinheit im Hinblick auf die Kaufakte des Alltags eine irgendwie definierte, dauernd beachtete Rationalität des Wahlverhaltens zuzuschreiben.

Faßt man die Konsumeinheit als Haushalt, also als regelmäßig aus einer Mehrheit von Individuen bestehende Wirtschaftseinheit auf, so ergibt sich bei Verzicht auf eine allzu idealtypische Haushaltsdefinition die Frage, inwieweit die Wahlakte einer Konsumeinheit einem einzigen und mit gewissen Eigenschaften ausgestatteten Präferenzsystem entsprechen. Für den Ein-Personen-Haushalt als Verbrauchseinheit existiert das Problem zwar grundsätzlich nicht, in allen anderen Fällen kann die Vorstellung eines einheitlichen Präferenzsystems des Haushalts jedoch nicht ohne Überprüfung akzeptiert werden, denn Präferenzen im Hinblick auf alternative Güterbündel sind grundsätzlich individuum-bezogen. Im Grunde liegt (vgl. ARROW [4,S.9]) für die soziologische Gruppe der Familie oder des Haushalts schon ein - wenn auch infolge der geringen Zahl von Mitgliedern besonders einfaches - Aggregationsproblem für Präferenzordnungen beziehungsweise Nutzenfunktionen vor. Ein solches ist häufig Gegenstand logisch-theoretischer Erörterungen unter Zugrundelegung von Annahmen über die soziologische Struktur der Einheit gewesen, wobei die Frage, wie denn der Interessenausgleich praktisch vor sich gehe, in aller Regel ausgeklammert wurde. Die einschlägigen Theorien setzen vielmehr häufig eine mehr oder weniger demokratische, also auf Mehrheitsbeschluß beruhende Kollektiventscheidung voraus, die nicht weiter analysiert wird (vgl. z. B. STENGER [148,S.4]; ARROW [4, S.28 ff.]; NEWMAN [111,S.173 ff.]). Als wirtschaftstheoretisch rele-

vantes Resultat solcher Überlegungen ist unter anderem zu verzeichnen, daß kollektive Indifferenzkurven nicht existieren (SAMUELSON [128]), sowie, daß bei nichtdiktatorischem Ausgleich der Individualpräferenzen die Annahme einer konsistenten (vgl. § 1, Axiom O 2 Seite 2) Gruppenpräferenzordnung nicht realistisch ist (vgl. z.B. die Behandlung des sogenannten Condorcet-Paradox bei NEWMAN [111,S.184]; ARROW [4,S.3]; KRELLE [90,S.137]). Vielmehr können paradoxe und widersprüchliche Kollektivpräferenzen durch Ausgleich von theoretisch völlig korrekten Individualpräferenzen konstruiert werden (MCGARVEY [103]).

Die Frage, durch welche Art des Ausgleichs von individuellen Präferenzen Wahlentscheidungen bezüglich Konsumgüterkäufen in einem Mehr-Personen-Haushalt tatsächlich getroffen werden, sowie die Frage, inwieweit der Präferenzausgleich selbst Änderungen im Zeitablauf unterworfen ist, sind bisher nur ansatzweise (z.B. SAMUELSON [128]) behandelt worden. Einige soziologisch orientierte Arbeiten liegen vor (vgl. etwa CAMPBELL [18] und SHAW [136]), die auch die Frage berühren, ob im Bereich einer so festgefügten soziologischen Gruppe wie der des Haushalts Kongruenz der Präferenzvorstellungen in bezug auf die einzelnen Mitglieder vorliegen kann. Allerdings fehlt noch der Brückenschlag zur Konsumtheorie.

Die Annahme eines Präferenzsystems für jede Konsumeinheit, das mit gewissen logischen Eigenschaften der Rationalität des Wahlverhaltens ausgestattet ist, kann also durchaus noch nicht als wirtschaftstheoretisch gesichert angesehen werden.

Ein weiterer Gesichtspunkt gegen die Annahme irgendeiner Art von generell gültiger Rationalität des Konsumentenverhaltens im Sinne der klassischen Verbrauchstheorie muß aus der Grundvorstellung einer Entscheidungseinheit abgeleitet werden, die der Menge aller denkbaren alternativen Güterbündel zu Beginn einer Periode eine Präferenzordnung oder eine Nutzenfunktion zuordnet.

Entgegen dieser Vorstellung fehlt es in vielen Fällen bei Konsumentscheidungen

(1) an der Festlegbarkeit einer Periode, für die ein gewisser, zusammen mit den Preisen die Bilanzungleichung bestimmender Geldbetrag für konsumtive Zwecke zur Verfügung steht, außerdem an der Periodenbezogenheit der Wahlakte überhaupt; dies gilt insbesondere für Käufe von häufig benötigten Verbrauchsgütern;

(2) an der Wohldefiniertheit einer Konsumsumme, die von vornherein zu Beginn der Periode auf Grund einer definitiven Entscheidung über die Sparquote festgelegt ist; Sparüberlegungen werden nicht zu Beginn einer jeden Wirtschaftsperiode angestellt und mit der Festlegung einer Sparquote abgeschlossen, sondern sind an praktisch jedem konsumtiven Wahlakt beteiligt;

(3) an der Bereitschaft des Haushalts, rationale Überlegungen - zumindest bei oft benötigten Verbrauchsgütern des täglichen Lebens - überhaupt anzustellen; wird auf solche nicht ganz verzichtet, so beschränkt sich die Entscheidung des Haushalts auf eine sehr partielle und durchaus nicht an der Vorstellung globaler Güterbündel aufgerichtete präferenzmäßige Beurteilung; viele Konsumentscheidungen sind sogar rein habituell (KATONA [82,S.75 ff.]), das heißt, sie kommen ohne rationale oder gar preis- und einkommensbezogene Überlegungen zustande;

(4) an der Fähigkeit des Haushalts oder Individuums, Präferenzen bei qualitativ oder quantitativ sehr ähnlichen Güterbündeln äußern zu können; es existiert ein sogenannter Schwellenwert der Fühlbarkeit (KRELLE [90,S.112]), bei dessen theoretischer Berücksichtigung in der Konsumtheorie die Indifferenzkurven durch stückweise lineare, also nicht mehr überall differenzierbare Kurven ersetzt werden müssen.

Es ist also aller Grund vorhanden, logischen Deduktionen im Bereich der Konsumtheorie im Hinblick auf das reale Verhalten von Haushalten und Problemen der empirischen Nachfragemessung mit beträchtlichem Mißtrauen zu begegnen. Die von der Theorie in axiomatischer Form geforderte Konsequenz der Handlungsweise liegt zwar sicherlich im Ansatz, nicht aber in den Details vor. Man kommt damit zu der Schlußfolgerung, daß theoretische Ansätze gesucht werden müssen, die an die Konsumeinheit bezüglich Rationalität der Handlungsweise wesentlich geringere und damit realistischere Anforderungen stellen.

2.3. Wirtschaftsgut und Markenartikel

Die Frage, was ein Wirtschaftsgut sei und wie man es exakt definieren könne, wird in der Konsumtheorie in der Regel keiner Überlegung wert befunden. Ökonometrische Untersuchungen zur Nachfragemessung, wie etwa diejenigen von SCHULTZ [134,S.155-564], betreffen meist nur Grundnahrungsmittel, beispielsweise Zucker, Getreide, Kartoffeln; Differenzierungen, etwa nach Qualitäten, werden nicht vorgenommen.

Die moderne Marktsituation ist jedoch gekennzeichnet durch die in praktisch jedem Bereich der Konsumgütermärkte nachweisbare Tendenz, Güter, insbesondere Güter des Massenbedarfes, nicht mehr produzenten-anonym, sondern in Form von Markenartikeln anzubieten. Das heißt, etwa nach der Definition GUTENBERGs [57,S.387], daß es sich um standardisierbare Erzeugnisse handelt, die durch Warenzeichen und Produktausstattung von Konkurrenzprodukten unterschieden werden, deren Absatz insbesondere durch Werbung des Produzenten gefördert wird und die sich nach der Vorstellung der Käufer durch konstante Produktqualität auszeichnen. Als für Markenartikel zwar nicht wesensbestimmend, aber kennzeichnend ist neben diesen Kriterien die Tendenz der Produzenten zu verzeichnen, die Preise im Zeitablauf, wenn möglich, konstant zu halten und - wenn auch nicht in allen Fällen - durch vertikale Preisbindung oder Preisempfehlungen Verbraucherpreisunterschiede, die im Sektor der Distribution entstehen könnten, zu unterbinden.

Begrifflich ist die Konsumtheorie dieser Entwicklung nicht recht gewachsen. Es gibt nämlich praktisch keine Erörterungen der Frage, ob ein von den logischen Ansätzen der Konsumtheorie gefordertes Güterbündel grob definierte Wirtschaftsgüter, etwa Kaffee überhaupt in bestimmter Menge, oder aber qualitativ sehr fein abgegrenzte Güter, etwa Kaffee Marke A Güteklasse 1 neben Kaffee Marke B Güteklasse 1 und Marke A Güteklasse 2, enthalten soll; das Problem wird nur gelegentlich gestreift (vgl. z. B. GREEN [55,S.9]) und durch entsprechende Annahmen umgangen.

Eine echte Diskussion der Frage der Definition eines Wirtschaftsgutes findet sich erst neuerdings in einer Arbeit von LANCASTER [94], die eine Art Aktivitätsanalyse für die Verbrauchstheorie in Analogie zur Produktionstheorie enthält. Bezüglich Güterdefinition sind die folgenden drei Thesen (LANCASTER [94,S.134]) bemerkenswert:

(1) Ein Gut hat als solches keinen Nutzen für einen Konsumenten; es hat nur Kenngrößen, welche Nutzen herbeiführen.
(2) Ein Gut hat in aller Regel viele solche Kenngrößen, und eine Kenngröße ist in vielen Fällen für mehrere Güter zuständig.
(3) Gütermengenkombinationen können andere Kenngrößen haben als die sie bildenden Einzelgütermengen.

Die Güter werden durch einen Satisfaktionsvektor gekennzeichnet, der

diese Kenngrößen enthält. Je näher die Güter verwandt sind, umso geringer ist die Anzahl unterschiedlicher Komponenten des Satisfaktionsvektors. Das Problem der Festlegung des Gütertegriffes entfällt durch eine solche Konstruktion. Wir wollen uns wegen der Bedeutung dieser Frage für den weiteren Fortgang der Arbeit trotzdem mit den Möglichkeiten einer vernünftigen Güterdefinition beschäftigen.

Den im Zusammenhang mit markttheoretischen Erörterungen formulierten Standpunkt SCHNEIDERs [132,S.400] auf die Konsumtheorie übertragend, könnte man für einen sehr eng gefaßten Güterbegriff plädieren und sagen: In einem hypothetischen Güterbündel im Sinne der Konsumtheorie müssen die enthaltenen Güter ganz exakt nach Marke, Typ, Packungsgröße und ähnlichen Kriterien unterschieden sein. Kaffee Marke A Güteklasse 1 und Kaffee Marke B Güteklasse 1 sind bei dieser Auffassung verschiedene Güter. Die Konsumtheorie würde sich damit infolge der völlig unübersehbaren Vielfalt möglicher Marken oder Typen, die das Güterbündel ergeben, mit ihren Annahmen weiter von den praktischen Möglichkeiten rationalen Konsumentenwahlverhaltens entfernen. Hinzu käme, daß man konsequenterweise die Güter auch noch nach Verfügbarkeitsdatum oder Verfügbarkeitsort (DEBREU [28,S.30-31]) oder anderen akzessorischen Merkmalen unterteilen müßte, um einen exakten Güterbegriff zu bekommen.

Geht man dagegen von der Position MÖLLERs [107,S.23] aus, der eine allzu puristische und auf völlige Unterschiedslosigkeit der Güter zugeschnittene Güterdefinition ablehnt, so gewinnt die Vorstellung des - jetzt aus qualitativ gröber definierten Gütermengen zusammengesetzten - Güterbündels an Realitätsnähe. Tatsächlich hat sich auch die Ökonometrie der Nachfrage bei ihren empirischen Ansätzen zur Nachfragemessung, wie schon bemerkt, meist mit der Nachfrageanalyse gröber definierter und nicht markenweise oder sonstwie differenzierter Güter beschäftigt. Solche Untersuchungen sind von genereller volkswirtschaftlicher Bedeutung für die Beurteilung von Nachfrageentwicklungen unter dem Einfluß sich ändernder Preise oder anderer erklärender Variablen.

Für die Markenartikel anbietende Unternehmung sind Befunde dieser Art wichtig, weil Rückschlüsse auf Art und Ausmaß von Absatzänderungen der Branche bei entsprechenden Preis-, Einkommens- oder Änderungen sonstiger Einflußgrößen möglich sind. Von ungleich größerer unternehmens-

politischer und speziell absatzpolitischer Bedeutung für die Unternehmung ist aber die Frage nach der Entwicklung ihres Anteils an einem Gütermarkt unter dem Einfluß von Preisänderungen, Einkommensänderungen, aber auch Änderungen in der Art und Intensität des Einsatzes ihres absatzpolitischen Instrumentariums. Absatzausweitungen eines Markenartikelherstellers sind meist, insbesondere, wenn es sich um ausgereifte und eingeführte Massengüter handelt, nur zu einem geringen Teil auf Bedarfsausweitungen zurückzuführen. Absatzpolitisch viel wesentlicher als dieser Gesichtspunkt ist für den Markenartikler der Kampf um den Marktanteil mittels Werbung, Qualitätsvariation und Absatzmethode. Die dabei auftretenden diagnostischen und prognostischen Probleme theoretisch zu erörtern und empirisch zu bearbeiten, dafür hat sich die Konsumtheorie und die Ökonometrie der Nachfrage bisher nicht für besonders kompetent gehalten. Das ist im Hinblick auf die zwar weniger volkswirtschaftliche als vielmehr unternehmenspolitische Wichtigkeit dieser Fragen ein Versäumnis gewesen. Preistheoretische Ansätze mit expliziter Berücksichtigung von Werbekosten sind zwar in reicher Auswahl vorhanden (vgl. z. B. KRELLE [90,S.118 ff., 204 ff., 280 ff., 629 ff.], BASMANN [7], GUTENBERG [57,S.456 ff.], FRIEDERICHS [48], WILHELM [170]), aber meist von keiner operationellen Bedeutung für den Unternehmer.

2.4. Die Aggregation individueller Nachfragekurven

Unter Aggregation versteht man allgemein den Übergang von elementaren Wirtschaftseinheiten zu größeren Einheiten, insbesondere zu einer Volkswirtschaft und den entsprechenden Übergang von mikroökonomischen zu makroökonomischen Größen und Funktionen (vgl. z. B. STENGER [148, S.3]). Die Problematik dieses Überganges betrifft vor allem die Fragen:

(1) in welcher mathematisch-technischen Form aus mikroökonomischen makroökonomische Variablen gewonnen werden können;

(2) inwieweit zwischen makroökonomischen Variablen analoge Beziehungen bestehen wie zwischen den zu ihrer Definition verwendeten mikroökonomischen Größen; dieses Problem, von THEIL [157,S.5 ff.] als "analogy approach" bezeichnet, tritt in neueren Arbeiten (z. B. GREEN [55, insbesondere S.3 und S.9 ff.]) etwas zurück zugunsten der Frage der Konsistenz von Aggregationen ("consistency approach");

man versteht dabei unter Konsistenz einer Aggregation die Eigenschaft, daß die Verwendung aggregierter Informationen in einem Modell zu keinen anderen Lösungen führt als die Verwendung nicht-aggregierter Größen.

Für die Zusammenfassung von individuellen zu kollektiven Nachfragefunktionen hat man allerdings bis zum Erscheinen der Spieltheorie VON NEUMANNs und MORGENSTERNs [110] nicht allzu viele Schwierigkeiten gesehen (vgl. allerdings LEIBENSTEIN [95] und die dort auf S.184-187 angegebene Literatur). Volkswirtschaftliche Nachfragefunktionen wurden als sich additiv aus individuellen Nachfragefunktionen zusammensetzende Funktionen definiert, als Argumente verwendete man dementsprechend die Preise, das Volkseinkommen und dessen Verteilung (vgl. z. B. SCHNEIDER [133,S.45-46]) und fand so eine zufriedenstellende Analogie der Beziehungen zwischen mikro- und makroökonomischen Variablen.

Diese Gedankengänge haben sich inzwischen als ungesichert, wenn nicht gar falsch erwiesen. In den Mittelpunkt der theoretischen Revision des Aggregationsproblems speziell für Nachfragefunktionen sind folgende Fragen gerückt:

(1) Ist die bisher als ziemlich problemfrei angesehene und meist ohne eingehende theoretische Prüfung akzeptierte Vorstellung der Existenz individueller Nachfragefunktionen noch zu halten?

(2) Ist die Annahme der Aggregation individueller Nachfragefunktionen mittels einfacher Addition noch richtig?

(3) Sind kollektive Nachfragefunktionen schlechthin, ohne Berücksichtigung ihrer irgendwie gearteten Zusammensetzung aus mikroökonomischen Funktionen, als Ausgangskonzept ökonometrischer Nachfrageanalysen Ansätzen vorzuziehen, die das Aggregationsproblem in ihre theoretische Grundlegung einbeziehen und deshalb als irgendwie gelöst ansehen müssen?

2.4.1. Die Existenz individueller Nachfragefunktionen

Die Existenz individueller Nachfragefunktionen im Sinne des Vorhandenseins widerspruchsfreier Voraussetzungen für eine solche Vorstellung ist bis zum Erscheinen einer kritischen Arbeit von GEORGESCU-

ROEGEN [51], in der das Problem als völlig ungelöst erkannt wurde, theoretisch nicht angezweifelt worden. Auch die spieltheoretisch fundierte Bestandsaufnahme und Kritik der Konsumtheorie unter Berücksichtigung insbesondere der nun in den Blickpunkt des Interesses gerückten Aggregationsproblematik bei MORGENSTERN [108] geht kommentarlos von der Existenz individueller Nachfragefunktionen aus.

Erst in der Arbeit von FELS [39] ist eine kritische Beurteilung des Existenzproblems für individuelle Nachfragefunktionen enthalten. Das Ergebnis, insbesondere im Zusammenhang mit einer Auseinandersetzung mit den MORGENSTERNschen Ergebnissen entwickelt, ist deprimierend, schon auch deshalb, weil es sich in keiner Weise auf das (im Grunde nachrangige) Problem der empirischen Bestimmung von individuellen Nachfragefunktionen bezieht, sondern ausschließlich auf logische Existenzüberlegungen gegründet ist. Es sei hier kurz, ohne detaillierte Berücksichtigung der Argumentation, wiedergegeben (vgl. FELS [39, S. 49 ff.]). Individuelle Nachfragefunktionen können nur für Güter existieren,

(1) für die durch Kauf- oder Konsumexperimente der Verbrauchseinheit Präferenzänderungen oder -Richtigstellungen nicht vorkommen können, weil die Konsumeinheit durch Kauf- und Verbrauchserfahrungen bereits einen vollständigen Überblick über mögliche Alternativen gewonnen hat, also nichts mehr hinzulernen kann; und

(2) bei denen sich durch Einkommensänderungen der Konsumeinheiten bezüglich der Verbrauchsgewohnheiten grundsätzlich nichts ändert.

Marktpraktisch ausgedrückt heißt das nichts anderes, als daß individuelle Nachfragefunktionen nur für Wirtschaftsgüter existieren können, die

(1) Massenverbrauchsgüter sind, für die also generell auf Grund des Kriteriums häufiger sukzessiver Wahlakte ein hoher Stand konsumtiver Erfahrung der Haushalte vorliegt; und

(2) nicht inferior sein dürfen.

Damit ist für den - zumindest wertmäßig - dominierenden Anteil der Kaufhandlungen der Konsumeinheiten die Voraussetzung der Existenz individueller Nachfragefunktionen als gar zu schlecht begründet nachgewiesen.

2.4.2. Alternative Aggregationsverfahren für individuelle Nachfragefunktionen

Die additive Zusammenfassung individueller Nachfragefunktionen - ihre Existenz sei hier zunächst nicht in Frage gestellt - zu meso- oder makroökonomischen Nachfragefunktionen ist durch MORGENSTERN [106] mit vor allem spieltheoretischen Argumenten angegriffen worden. Sein Ergebnis ist, kurz zusammengefaßt, folgendes:

(1) Kollektive Nachfrage kann nur als Summation individueller Nachfrage aufgefaßt werden, wenn die Nachfragefunktionen der Haushalte voneinander unabhängig sind [108,S.175].

(2) Kollektive Nachfragefunktionen können nicht postuliert werden, ohne daß darauf geachtet wird, wie sie aus individuellen Nachfragefunktionen zusammengesetzt gedacht werden können, denn schon jede Änderung der Anzahl der Nachfragenden ändert die Struktur der kollektiven Nachfrage.

Die Wirtschaftstheorie und insbesondere die Nachfragetheorie ist nach MORGENSTERN vor allem deshalb Einwänden ausgesetzt, weil sie den Fall der Nichtadditivität der individuellen Nachfragefunktionen nicht in ihre Betrachtungen einbezieht und, insbesondere unter dem Einfluß von KEYNES, von Makrogrößen ausgeht, ohne hinter deren Entstehung zu blikken. Zur Aggregation im allgemeinen sind seit dem Erscheinen der Arbeit von MORGENSTERN einige Untersuchungen zu verzeichnen (vgl. die Zusammenstellung bei BOSSMANN [11,S.64 ff.]). Dabei hat sich gezeigt, daß meist wirtschaftstheoretisch unhaltbare Bedingungen für die Gestalt individueller Funktionen resultieren, wenn man an die durch Aggregation zu gewinnenden Makrovariablen gewisse vernünftig erscheinende formale Anforderungen stellt (KLEIN [86]). Derart negative Ergebnisse haben dazu geführt, daß makroökonomische Verhaltensgleichungen, insbesondere Nachfragefunktionen, nur noch als statistische Beschreibungen von Gesetzmäßigkeiten des Verhaltens einer Gesamtheit von Konsumeinheiten aufgefaßt werden (etwa NYBLÉN [113,S.58]; vgl. auch die Interpretation bei BÖSSMANN [11,S. 79 ff.]).

Die gleichermaßen negative, wenn auch anders begründete Grundtendenz bei der Beurteilung der Aggregationsproblematik ist in der Untersuchung von FELS [39] zu finden. Im Gegensatz zur Auffassung MORGENSTERNs ist es nach der Argumentation von FELS nicht richtig, nach anderen Aggre-

gationsmethoden als der Summierung für die individuellen Nachfragefunktionen zu suchen, denn "individuelle Nachfragefunktionen sind additiv oder nicht wohldefiniert" (FELS [39,S.140]). Damit ist das Aggregationsproblem als solches ausgeräumt und die Gesamtproblematik auf das vorher diskutierte Problem der Existenz individueller Nachfragefunktionen zurückgeführt.

Man muß schon auf Grund dieser knappen Übersicht zur Aggregationstheorie feststellen, daß die mikroökonomische Fundierung von kollektiven ökonomischen Nachfragefunktionen, die zu ökonometrischen Messungen herangezogen werden, als allgemeingültig noch nicht gelungen betrachtet werden muß. Zwischen den Theorien der individuellen Präferenzen, offenbarten Präferenzen oder Nutzenvorstellungen und makroökonomisch angesetzter Kollektivnachfrage fehlt eine logisch widerspruchsfreie und allgemeine Synthese.

2.4.3. Kollektive Nachfragefunktionen als Ausgangskonzept ökonometrischer Nachfrageanalysen

Anknüpfend an die obigen Feststellungen muß man sich die Frage stellen, ob es im Zusammenhang mit ökonometrischen Nachfrageanalysen, die auf kollektiven Nachfragefunktionen beruhen, überhaupt nötig ist, sich um deren theoretische Konstruktion aus mikroökonomischen Funktionen zu sorgen, mit anderen Worten also, ob MORGENSTERNs Position (vgl. 2.4.2.,S.26) haltbar ist angesichts der Tatsache, daß sich eine einwandfreie theoretische Verknüpfung von mikro- und makroökonomischen Nachfragefunktionen als nicht möglich erwiesen hat (vgl. auch FELS [39,S.117]). Tatsächlich ist von SHUBIK [137] festgestellt worden, daß man bei der Zusammenfassung mikroökonomischer zu makroökonomischen Funktionen nicht nur auf die Berücksichtigung von individuumbezogenen Handlungsweisen verzichten darf, sondern sogar aus informationstheoretischen Gründen verzichten muß. Spieltheoretisch gesehen werden dadurch mittels informationstheoretisch bedingter vereinfachender Fiktionen (SHUBIK [137,S.149]) Viel-Personen-Spiele auf Ein- oder Zwei-Personen-Spiele reduziert. Von diesem Standpunkt aus ist die kollektive Nachfragefunktion als wahrscheinliche ex-ante-Zuordnung auf Grund einer extrapolierten statistischen Reihe (FELS [39,S.112]) begrifflich weniger gewichtigen Einwänden ausgesetzt als die individuelle Nachfragefunktion (FELS [39,S.117]; vgl. auch LITTLE [96]).

Daraus folgt eine starke Abwertung der Bedeutung konsumtheoretischer Theorienbildung auf Mikroebene, insbesondere zur individuellen Nachfragefunktion, die bisher im Zentrum der Betrachtungen gestanden hat.

§ 3 Vorhaben

Im Paragraphen 2 dieser Arbeit wurde versucht, einige grundsätzliche theoretische Schwierigkeiten der gegenwärtig herrschenden Auffassungen im Bereich der Nachfragetheorie darzulegen. Es erscheint angesichts dieser in der Tendenz negativen Befunde nicht vermessen, nach ganz neuen Ansätzen Ausschau zu halten, die weniger theoretischen, insbesondere auch ökonometrischen Einwänden ausgesetzt sind und bezüglich der vier angeschnittenen Probleme der Motivation von Kaufakten, der Rationalität des Konsumentenverhaltens, der Differenzierung von Wirtschaftsgütern in konkurrierende Produktmarken und der Aggregation individueller Nachfragefunktionen vielleicht befriedigendere Ergebnisse liefern.

In den Mittelpunkt der Betrachtungen sei ausschließlich das Problem der Markenwahl der Konsumenten und die Frage der Entwicklung der Marktanteile der Markenartikel herstellenden Unternehmungen gerückt. Untersucht wird also nur ein Teilaspekt des Konsumenten-Wahlverhaltens, nämlich die Frage, auf welche Weise die Markenwahl der Haushalte für ein bestimmtes, in mehreren konkurrierenden Varianten angebotenes Konsumgut theoretisch und ökonometrisch erfaßt werden kann.

Die große Rolle, die der Informations- und Erfahrungsstand der Konsumeinheit bei den Kaufakten spielt, hat sich im Zusammenhang mit den FELSschen Überlegungen zur Existenz individueller Nachfragefunktionen (vgl. 2.4.1.,S.24-25) gezeigt. Neuere Überlegungen insbesondere psychologischen und soziologischen Ursprungs haben dazu geführt, die Bedeutung der Verbrauchserfahrung der Haushalte bei Güterkäufen in erhöhtem Maße zu berücksichtigen und Markenwahlakte in ihrer Aufeinanderfolge als sogenannten Lernprozeß aufzufassen. Dabei ist unter Lernen jede systematische Änderung des Wahlverhaltens zu verstehen, die einerseits durch weitgehende Verwertung von Kauferfahrungen der Konsumeinheit, andererseits durch Änderungen der im weitesten Sinne verstandenen Wahlsituation im Zeitablauf - etwa durch Änderung der Preissituation, durch Einkommensänderungen oder durch Variationen sonstiger

denkbarer Determinanten von Kaufentscheidungen (vgl.z.B. HOWARD [76, S.35]; KUEHN [91,S.17 ff.]; BUSE und KOSTELLER [16,S.3]) - verursacht wird.

Es bestünde nun die prinzipielle Möglichkeit, die Markenwahlvorgänge der Konsumeinheiten entsprechend der gängigen Theorie des Haushalts als Funktion nicht nur der Wahlsituation, also eines im Hinblick auf die vielen möglichen Kaufmotivationen (vgl. 2.1.,S.15 ff.) erweiterten Situationsvektors, sondern auch vorausgegangener Wahlakte zu erklären. Angesichts der Unmöglichkeit, alle diese Kaufmotive theoretisch festzulegen, metrisch zu skalieren und durch attitudinale oder operationelle Funktionen zum Ausdruck zu bringen (vgl. 2.1.,S.16-17 (1),(2),(3)), hätte dieses Vorhaben keinen Sinn. Außerdem ist wegen der im Konsumbereich dominierenden Stellung des Markenartikels mit möglichst konstanten Preisen im Zeitablauf speziell mittels der Preise ein sich änderndes Wahlverhalten nicht erklärbar.

Dieser Gedankengang weist den Weg, die Markenwahl der Haushalte theoretisch als Zufallsexperiment, eine Folge von Wahlakten in Anlehnung an theoretische Konstruktionen der mathematischen Psychologie als Zufallsprozeß (stochastischen Prozeß), also, unmathematisch definiert, als zeitablaufbezogenen und wahrscheinlichkeitstheoretisch erfaßbaren Vorgang (DOOB [29,S.46]) aufzufassen. Ein Markenwahlvorgang wird als stochastisch abhängig von einer Anzahl früherer Wahlakte für dasselbe (in einem weiteren Sinn definierte) Gut verstanden. Das heißt nicht, daß damit die Ursache-Wirkungs-Beziehung für die Markenwahl, also die Beziehung zwischen Kaufmotiven und Käufen, als aufgehoben angesehen würde. Es wird für sie nur eine andere Formulierung verwendet, die auf die Anwendung des sogenannten deterministischen Postulates verzichtet (vgl. RICHTER [120,S.50-51]). Wie später ersichtlich werden wird, besteht auch die Möglichkeit, aus der Vielzahl von Kauf- und Wahlbestimmungsgrößen die von der herkömmlichen Konsumtheorie als besonders wichtig erkannten Preis- und Einkommensabhängigkeiten deterministisch zu erfassen und in ein sonst stochastisches Modell einzugliedern.

Was diese Annahme der stochastischen Abhängigkeit der Markenwahlvorgänge von vorhergehenden Käufen für die volkswirtschaftliche Theorie des Haushalts besagt, wird zweckmäßigerweise erst am Schluß der Ar-

beit erörtert. Nur einige besonders offensichtliche Gesichtspunkte seien jetzt schon verzeichnet:

(1) Die Betrachtungsweise ist wegen der angenommenen Abhängigkeit der Markenwahlvorgänge von vorhergehenden Käufen dynamisch.

(2) Infolge der Annahme stochastischer Abhängigkeit sukzessiver Markenwahlakte fehlt es für ein auf diesem Grundgedanken aufgebauten Modell an der Notwendigkeit, die Motive der Markenwahl in ihrer ganzen Vielfalt und gegenseitigen Abhängigkeit auszuforschen. Das heißt durchaus nicht, daß theoretische Überlegungen zur Motivation von Markenwahlakten damit grundsätzlich überflüssig würden; nur ist der hier entworfene neue verbrauchstheoretische Ansatz auf Ergebnisse solcher Motivationsforschung nicht angewiesen.

(3) Spezielle Überlegungen zur Rationalität des Konsumenten-Wahlverhaltens (vgl. insbesondere 2.2.,S.18 ff.), wie sie in statischen Versionen der Konsumtheorie in mannigfacher Form enthalten sind, sind für ein solches Modell ebenfalls entbehrlich, weil die Rationalität des Konsumenten-Wahlverhaltens Sicherheit der Nutzen- bzw. Präferenzvorstellungen der Konsumeinheiten voraussetzt (vgl. 1.1.4., S.9-11), also kein Platz bliebe für Lernvorgänge.

(4) Die Problematik der Güterdefinition ist durch einen solchen Ansatz nicht zu umgehen. Wir wollen uns zunächst mit folgender auf unsere Grundidee zugeschnittener Arbeitsdefinition begnugen: Ein Wirtschaftsgut ist eine Menge $K: = \{K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m\}$ von ausstattungs- und qualitätsmäßig unterschiedenen Produkten (Marken), die von den Haushalten allgemein als stark substitutiv angesehen werden[1].

(5) Bezeichnet man als klassische individuelle Nachfragefunktion in Anlehnung an SCHNEIDER [133,S.45] die Funktion, die die Abhängigkeit der mengenmäßigen Nachfrage nach einem bestimmten Gut von den Preisen sämtlicher in den Begehrskreis des Haushalts fallenden Güter sowie von dessen Einkommen oder Konsumsumme zum Ausdruck bringt, so steht und fällt der hier zur Debatte stehende Ansatz für die Marken-

[1] Das Symbol m drückt hinfort, da ausschließlich Markenwahlvorgänge zur Diskussion stehen, die Anzahl verschiedener Marken eines Konsumgutes K aus und nicht mehr, wie bisher, die allgemeine Anzahl der in den Begehrskreis eines Haushalts fallenden Wirtschaftsgüter.

wahl nicht mit einer solchen Vorstellung. Auch eine Gesamtnachfragefunktion wird nicht in die zu entwickelnden Modelle einbezogen. Dieser Gedanke mag zunächst allzu neuartig und gewagt erscheinen. Er ist es jedoch nicht angesichts der Tatsache, daß neuerdings nicht nur stochastische Elemente in die Preistheorie einbezogen (vgl.z.B. ROBINSON [123]), sondern auch die Güterpreise als mit Verzögerung reagierende Abhängige der Lohn- und Materialkosten erklärt werden (YANCE [172]). Es gibt also bereits Ansätze zu einer Preistheorie ohne Nachfragefunktion. Der Schritt zu einer Nachfragetheorie ohne Nachfragefunktion ist deshalb nicht so groß, zumal sich der hier zu diskutierende Ansatz auf den Teilbereich der Markenwahl der Theorie des Haushalts beschränkt.

Die Rechtfertigung für eine solche Nachfragetheorie ohne Nachfragefunktion liefert jedoch vor allem die Gewichtigkeit der Einwände, die gegen die Existenz von individuellen Nachfragefunktionen und deren Aggregation in jüngerer Zeit vorgebracht wurden. Sie kamen im Abschnitt 2.4. (vgl.S.23 ff.) kurz zur Sprache. Eine lerntheoretische Konzeption der Konsumgütermarkenwahl ist mit diesen Einwendungen nicht belastet.

Die kurze Skizzierung der Grundidee dieser Arbeit läßt erkennen, daß der entworfene Ansatz zur Theorie der Markenwahl eine speziellere Variante des allgemeinen Lernmodells der stochastischen Lerntheorie (vgl. BUSH und MOSTELLER [16,S.13-45]), also eines Teilbereiches der Psychologie, darstellt. Man mag deshalb die hier zu entwickelnde Theorie der Markenwahl als im Prinzip psychologisch fundiert bezeichnen. Die Theorie des Haushalts, die den Ursprung jeder ökonomischen Theorie darstellt, hat aber schon von jeher und teils aus historischen Gründen eine inhärente psychologische Basis aufgewiesen (FELS [41,S.106]). Diese Basis ist zwar mentalistisch und hedonistisch-kalkülhaft, wie aus § 1 dieser Arbeit ersichtlich ist (vgl. auch FELS [41,S.107-109]), und deshalb von seiten der Psychologie Einwänden ausgesetzt; dies ändert aber nichts an der Tatsache, daß die ökonomische Theorie des Haushalts mannigfache Berührungspunkte mit der Psychologie aufweist. Der naheliegende Vorwurf, eine lerntheoretisch fundierte Theorie der Markenwahl sei ein allzusehr psychologisierender Ansatz, braucht daher nicht ernst genommen zu werden, weil er dann in gleicher Weise für die Präferenztheorie, die Nutzentheorie

und die Theorie der offenbarten Präferenzen gelten müßte. Gesteht man von seiten der Wirtschaftstheoretiker die enge Berührung von Psychologie und Wirtschaftstheorie bei der Analyse des Verhaltens der Haushalte ein, so ist es vielmehr nur folgerichtig, für die ökonomische Theorie der Güterwahl der Haushalte auch lerntheoretische Gesichtspunkte der Psychologie heranzuziehen, die bisher neben anderen Teilgebieten der Psychologie im Bereich der Verbrauchstheorie zu kurz gekommen sind (vgl. FELS [41,S.109-113]).

Programm dieser Untersuchung ist, auf der soeben verbal formulierten Grundannahme aufbauende Modelle des Konsumenten-Wahlverhaltens, angeordnet nach zunehmender Kompliziertheit und Realitätsnähe, zunächst darzustellen und auf ihre beschreibende und prognostische Relevanz theoretisch zu untersuchen. Die Grundidee wird dabei in verschiedenen Varianten konkretisiert und auf ihre jeweilige Plausibilität hin untersucht. Die in die Modelle eingehenden Wahrscheinlichkeiten werden zunächst als bekannt vorausgesetzt. Auf der Basis der entwickelten Modelle des Markenwahlverhaltens der Haushalte werden anschließend einige einfache Entscheidungsmodelle zur Preis- und Werbepolitik einer Markenartikel anbietenden Unternehmung diskutiert. Ein weiteres Kapitel ist der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, die in die lerntheoretischen Modelle zur Markenwahl eingehen, sowie der statistischen Prüfung von Modellhypothesen gewidmet. Ein Überblick über einige empirische Arbeiten zu der hier zu entwickelnden Nachfragetheorie ohne Nachfragefunktion schließt sich an. Abschließend werden die formulierten Modelle einer kritischen Prüfung unterzogen und der traditionellen Konsumtheorie noch einmal zusammenfassend gegenübergestellt.

KAPITEL 2: LERNTHEORETISCHE MODELLE ZUR BESCHREIBUNG UND PROGNOSE DER KONSUMGÜTERMARKENWAHL

§ 4 Markenwahl als Folge unabhängiger Zufallsexperimente

Der lerntheoretische Aspekt der Markenwahl für Konsumgüter, der im letzten Paragraphen generell als Basis der Überlegungen in dieser Arbeit herausgestellt wurde, soll hier eine besonders einfache, wenn auch, worauf noch einzugehen sein wird, im Hinblick auf die Realität nicht sehr einleuchtende Spezifikation erfahren. Es wird hier von der Voraussetzung ausgegangen, das Individuum wähle bei jedem Bedarfsfall aus der Menge der angebotenen Marken eines Konsumgutes eine Marke aus derart, daß Ergebnisse und Anzahl früherer Wahlakte die gegenwärtige Markenwahl nicht beeinflussen. Anders ausgedrückt: Die Markenwahl wird zunächst aufgefaßt als unabhängiges Zufallsexperiment. Oder, lerntheoretisch formuliert, das Individuum lerne durch vorhergehende Wahlvorgänge nichts hinzu; durch eine Markenwahl werde sein Wahlverhalten gegenüber der Menge der angebotenen Marken eines Wirtschaftsgutes für die Zukunft nicht verändert; es entscheide sich bei der Markenwahl gleichsam ohne Gedächtnis. Ein dergestalt vereinfachter lerntheoretischer Ansatz ist weitgehend frei von mathematischen Schwierigkeiten. Beabsichtigt ist mit seiner Diskussion vor allem, in die für die ganze Arbeit wesentliche Problematik der Formulierung und Systematisierung vernünftiger Annahmen über die in einem sehr weiten Sinn aufgefaßten Konsumgewohnheiten der Haushalte einzuführen.

4.1. Katalog der Modellannahmen

In einer Volkswirtschaft existieren N Konsumeinheiten, die ein bestimmtes Wirtschaftsgut $K = \{K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m\}$, das in Gestalt von m $(m > 1)$ Marken angeboten wird, verbrauchen. Bezüglich der Konsumgewohnheiten der N Haushalte werden zunächst folgende Annahmen gemacht:

4.1.1. Die Wahrscheinlichkeit $w_j^{[1,T]}(K_{i_1},\ldots,K_{i_t},\ldots,K_{i_T})$ dafür, daß bei einer Aufeinanderfolge von T Markenwahlvorgängen mit den Nummern $1,\ldots,t,\ldots,T$ der Einheit H_j die Marken $K_{i_1},\ldots,K_{i_t},\ldots,K_{i_T}$ in dieser Reihenfolge ausgewählt werden, die zufälligen Ereignisse

$K_{i_1},\ldots,K_{i_T}$ also nacheinander eintreten, erfülle folgende Beziehung:

$$W_j^{[1,T]}(K_{i_1},\ldots,K_{i_T}) = W_j^{[1]}(K_{i_1}) \cdot \ldots \cdot W_j^{[t]}(K_{i_t}) \cdot \ldots \cdot W_j^{[T]}(K_{i_T}) ,$$

wobei $W_j^{[t]}(K_{i_t})$ definiert ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim t-ten Markenwahlvorgang vom Haushalt H_j die Marke K_{i_t} gewählt wird (t=1,2,3,...).

Damit ist die diesen Paragraphen kennzeichnende Grundannahme der stochastischen Unabhängigkeit der Wahlakte der Haushalte im Zeitablauf formuliert.

4.1.2. Zusätzlich zu dieser Hypothese ist zur Konstruktion eines Modells der Markenwahl die Angabe einiger akzessorischer Annahmen nötig, die sich auf die Konsumgewohnheiten der Haushalte beziehen. Wir wollen zunächst von folgenden sehr restriktiven akzessorischen Annahmen ausgehen:

4.1.2.1. Die Wahrscheinlichkeiten $W_j^{[t]}(K_i)$ $(j=1,\ldots,N)$ dafür, daß die Marke K_i vom Haushalt H_j beim t-ten Markenwahlvorgang gewählt wird, seien für alle Konsumeinheiten gleich; es gelte also:

$$W_1^{[t]}(K_i) = \ldots = W_j^{[t]}(K_i) = \ldots = W_N^{[t]}(K_i) =: W^{[t]}(K_i)$$

Das heißt, daß die Determinanten der Markenwahl alle Haushalte in genau gleicher, durch ein und dieselben Wahrscheinlichkeiten gekennzeichneter Weise ansprechen.

4.1.2.2. Jeder der Haushalte H_j kaufe zu Beginn jeder Periode (etwa: Woche) 1,...,t,... genau eine Quantität einer Marke K_i des Konsumgutes K (etwa: eine 125-g-Packung einer von m angebotenen Kaffeesorten). Die Wahlakte der Haushalte erfolgen also simultan zu diskreten Zeitpunkten; die Nummer der Periode ist gleich der Nummer des Wahlvorgangs.

4.1.2.3. Alle Marken würden nur in einer einheitlichen und gleichen Quantität angeboten und nachgefragt.

4.1.2.4. Die Wahrscheinlichkeiten $W_j^{[t]}(K_i)$ (t=1,2,...) dafür, daß die Marke K_i von den Haushalten zu Beginn der Periode t gewählt wird, seien im Zeitablauf konstant; es gelte also:

$$w_j^{[1]}(K_i) = w_j^{[2]}(K_i) = \ldots = w_j^{[t]}(K_i) = \ldots = w_j^{[T]}(K_i) = w_j(K_i)$$

$$=: W(K_i) \qquad \text{(wegen 4.1.2.1.)},$$

so daß man aus der in 4.1.1. postulierten Beziehung für alle $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ erhält:

$$w_j^{[\tau+1,\,\tau+T]}(K_{i_1}, \ldots, K_{i_T}) = w_j^{[1,\,T]}(K_{i_1}, \ldots, K_{i_T})$$

Die Wahlwahrscheinlichkeiten seien also insbesondere zunächst keine Funktionen von Preisen, Preisänderungen, vom Haushaltseinkommen oder von dessen Änderungen. Das heißt, man geht davon aus, daß entweder die Preise aller nachgefragten Güter sowie die Haushaltseinkommen im Zeitablauf konstant sind, oder vorkommende Preis- und Einkommensänderungen die Markenwahl der Konsumenten nicht über eine Änderung der Wahlwahrscheinlichkeiten beeinflussen.

Zur Vereinfachung definieren wir abschließend $w_j^{[t]}(K_i) := p_j^{[t]}(i)$; entsprechend $W^{[t]}(K_i) := p^{[t]}(i)$; sowie $W(K_i) := p(i)$.

4.2. Modellanalyse

Die Annahmen 4.1.1. und 4.1.2.1. bis 4.1.2.4. entsprechen dem verallgemeinerten BERNOULLIschen Schema einer Folge unabhängiger Versuche (vgl. z. B. GNEDENKO [52,S.65]); da voraussetzungsgemäß in jeder Periode bei jedem Haushalt genau eine Markenwahl vorkommt, ist jeweils $\sum_{i=1}^{m} p(i) = 1$.

4.2.1. Einzelwirtschaftliche Betrachtung

Für eine Konsumeinheit H_j und, unter Berücksichtigung unserer restriktiven Modellannahmen, in gleicher Weise für alle N Haushalte, ergibt sich unter Zugrundelegung des verallgemeinerten BERNOULLIschen Schemas:

(1) Die Wahrscheinlichkeit $w_j^{[t]}(K_i)$ dafür, daß beim t-ten Wahlvorgang eine Marke K_i gewählt wird, beträgt

$$w_j^{[t]}(K_i) = p(i) \qquad \text{(IV.1.)}$$

Dies ist einfach eine Übernahme der Voraussetzungen, die in 4.1. for-

muliert wurden, sie wird hier aus Gründen der Systematik der Darstellung vorgenommen.

(2) Da unsere Betrachtungen auf die Entwicklung des (mengen-, nicht wertmäßigen) Marktanteils einzelner Marken K_i gerichtet sind und solche Marktanteile in der Regel auf größere Zeitabschnitte (etwa: Jahre) berechnet werden, die mehrere Markenwahlvorgänge der Konsumeinheiten umfassen, ist es grundsätzlich erforderlich, auch eine Aufeinanderfolge von T (T=1,2,...) Wahlvorgängen, etwa zu den Zeitpunkten $\tau+1,\tau+2,\ldots,\tau+t,\ldots,\tau+T$, einer Verbrauchseinheit zu analysieren. Für das erste hier beschriebene Modell ist diese Analyse besonders einfach, weil wir uns auf die Betrachtung des die Markenwahlvorgänge 1,...,t,...,T umfassenden Zeitabschnitts beschränken können. Die Ergebnisse haben Gültigkeit für alle Zeitabschnitte, die T Markenwahlvorgänge umfassen.

Die Wahrscheinlichkeit $w^{[1,T]}(T_1,\ldots,T_i,\ldots,T_m)$ dafür, daß innerhalb einer Aufeinanderfolge von T Wahlvorgängen 1,...,t,...,T einer Konsumeinheit T_1-mal die Marke K_1, T_2-mal die Marke K_2, ... , T_i-mal die Marke K_i, ... , T_m-mal die Marke K_m gekauft wird ($0 \leq T_i \leq T$; $\sum_{i=1}^{m} T_i = T$), ist durch folgende Multinomialverteilung (vgl. z. B. GNEDENKO [52,S.67]) gegeben:

$$w^{[1,T]}(T_1,\ldots,T_m) = \frac{T!}{T_1!.\ \ldots\ .T_m!}\ p^{T_1}(1).\ \ldots\ .p^{T_i}(i).\ \ldots\ .p^{T_m}(m) \qquad \text{(IV.2.)}$$

Die Wahrscheinlichkeit $w^{[1,T]}(T_i)$ dafür, daß unter den angegebenen Bedingungen die Marke K_i genau T_i-mal gewählt wird, erhält man mittels Rückführung der Multinomialverteilung auf das einfache BERNOULLIsche Schema mit zwei Ausprägungen (vgl. z. B. FISZ [47,S.146]):

$$w^{[1,T]}(T_i) = \frac{T!}{T_i!(T-T_i)!}\ p^{T_i}(i)(1-p(i))^{T-T_i} \qquad \text{(IV.2'.)}$$

Verwendet man die bekannten Formeln für Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen T_i, die binomialverteilt ist mit den Parametern T; p(i), so erhält man

$$E\,T_i = T.p(i) \qquad (i \in \{1,\ldots,m\}) \qquad \text{(IV.2a.)}$$

und

$$\text{var } T_i = T.p(i)(1-p(i)) \qquad (i \in \{1,\ldots,m\}) \qquad \text{(IV.2b.)}$$

Bei einer Aufeinanderfolge von T Markenwahlperioden kann also für die Wahlvorgänge jedes Haushaltes H_j unter den angenommenen restriktiven Bedingungen folgendes gesagt werden: Für jede Marke K_i ist die Anzahl der Käufe durch jede der Konsumeinheiten binomialverteilt mit den Parametern T; p(i).

Im Zeitablauf ändert sich daran entsprechend den Modellvoraussetzungen nichts. Man erhält bei einer Folge von T Wahlvorgängen jedes Haushalts für jede Marke K_i erwartungsgemäß T.p(i) Käufe; zufällige Abweichungen ergeben sich nach Maßgabe der Dichtefunktion (IV.2'.).

4.2.2. Gesamtwirtschaftliche Analyse der Entwicklung der Marktanteile

(1) Unter den Annahmen 4.1.1. und 4.1.2.1. bis 4.1.2.4. erhält man für den t-ten kollektiven Wahlvorgang, also für N nach unserer Modellvorstellung zu Beginn der t-ten Periode simultan stattfindende Markenwahlvorgänge wiederum ein verallgemeinertes BERNOULLIsches Schema, jetzt jedoch mit den Parametern N; p(1),...,p(i),...,p(m). Die Wahrscheinlichkeit $W^{[t]}(N_1,\ldots,N_i,\ldots,N_m)$ dafür, daß bei diesem kollektiven Wahlvorgang die Marken $K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m$ genau $N_1,\ldots,N_i,\ldots,N_m$-mal gewählt werden ($0 \leq N_i \leq N$; $\sum_{i=1} N_i = N$) ergibt sich aus folgender Multinomialverteilung:

$$W^{[t]}(N_1,\ldots,N_m) = \frac{N!}{N_1!.\ \ldots\ .N_m!}\ p^{N_1}(1).\ \ldots\ .p^{N_i}(i).\ \ldots\ .p^{N_m}(m) \qquad \text{(IV.3.)}$$

Die Wahrscheinlichkeit $W^{[t]}(N_i)$ dafür, daß eine Marke K_i bei diesem kollektiven Wahlvorgang genau N_i-mal gekauft wird, beträgt:

$$W^{[t]}(N_i) = \frac{N!}{N_i!(N-N_i)!}\ p^{N_i}(i)(1-p(i))^{N-N_i} \qquad \text{(IV.3'.)}$$

Dementsprechend erhält man für jede Marke $K_i \in K$ als Erwartungswert bzw. Varianz der Anzahl N_i der Käufe dieser Marke für diesen kollektiven Wahlvorgang:

$$E\ N_i = n.p(i) \qquad \text{(IV.3a.)}$$

und

$$\text{var } N_i = N.p(i)(1-p(i)) \qquad \text{(IV.3b.)}$$

(2) Wir betrachten jetzt eine Aufeinanderfolge von T Markenwahlvorgängen aller N Konsumenten unter den Modellannahmen 4.1.1. und 4.1.2.1. bis 4.1.2.4. Da die Wahlwahrscheinlichkeiten p(i) für alle Haushalte voraussetzungsgemäß gleich und im Zeitablauf invariant sind, ergibt sich hier erneut ein verallgemeinertes BERNOULLIsches Schema, diesmal von $M := N.T$ unabhängigen Zufallsexperimenten. Man erhält also die Wahrscheinlichkeit $W^{[1,T]}(M_1,\ldots,M_i,\ldots,M_m)$ dafür, daß bei T aufeinanderfolgenden kollektiven, also N.T = M einzelnen Wahlvorgängen die Marken $K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m$ genau $M_1,\ldots,M_i,\ldots,M_m$-mal gewählt werden, wie folgt:

$$W^{[1,T]}(M_1,\ldots,M_m) = \frac{M!}{M_1!.\ \ldots\ .M_m!}\ p^{M_1}(1).\ \ldots\ .p^{M_i}(i).\ \ldots\ .p^{M_m}(m) \qquad \text{(IV.4.)}$$

Analog ist die Wahrscheinlichkeit $W^{[1,T]}(M_i)$ dafür, daß eine Marke K_i genau M_i-mal gekauft wird:

$$W^{[1,T]}(M_i) = \frac{M!}{M_i!(M-M_i)!}\ p^{M_i}(i)(1-p(i))^{M-M_i} \qquad \text{(IV.4'.)}$$

mit

$$E\ M_i = M.p(i) = N.T.p(i) \qquad \text{(IV.4a.)}$$

und

$$\text{var } M_i = M.p(i)(1-p(i)) = N.T.p(i)(1-p(i)) \qquad \text{(IV.4b.)}$$

Wir definieren $A^{[1,T]}(i) := \frac{M_i}{M}$ als mengenmäßigen Marktanteil der Marke K_i für den Zeitabschnitt, der die Markenwahlakte $1,\ldots,t,\ldots,T$ umfaßt, und erhalten zunächst

$$A^{[\tau+1,\tau+T]}(i) = A^{[1,T]}(i) \qquad (\tau=0,1,2,\ldots)$$

und, unter Berücksichtigung von (IV.4a.) und (IV.4b.),

$$E\ A^{[1,T]}(i) = \frac{1}{M}.E\ M_i = p(i) \qquad \text{(IV.5a.)}$$

sowie

$$\operatorname{var} A^{[1,T]}(i) = \frac{N.T.p(i)(1-p(i))}{M^2} = \frac{p(i)(1-p(i))}{M} = \frac{p(i)(1-p(i))}{N.T} \quad \text{(IV.5b.)}$$

Der Erwartungswert des Marktanteils jeder Gütermarke ist also unter den Modellannahmen 4.1.1. sowie 4.1.2.1. bis 4.1.2.4. gleich der - annahmegemäß für alle Haushalte gleichen - Wahlwahrscheinlichkeit dieser Marke. Die Varianz des Marktanteils ist umso kleiner, je größer die Anzahl N der Haushalte ist und je größer die Anzahl T der betrachteten Wahlperioden ist, die der Marktanteilsberechnung zugrundeliegt. Geht man also bei der Beurteilung der Marktanteile von einem bestimmten Zeitraum (etwa einem Jahr) aus, so wird die Varianz umso kleiner, je schneller die Wahlakte der Haushalte aufeinanderfolgen.

In bezug auf eine Prognose der Marktanteile der einzelnen Marken erhält man unter den Voraussetzungen dieses Modells das Ergebnis, daß sich an den Marktanteilen erwartungsgemäß im Zeitablauf nichts ändert. Abweichungen von p(i), der jeweiligen Erwartungsgröße, ergeben sich entsprechend der Dichtefunktion (IV.4.).

4.3. Sukzessiver Abbau restriktiver akzessorischer Annahmen

4.3.1. Individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten

In Abänderung der Hypothese 4.1.2.1. wird die Annahme fallengelassen, für alle N Haushalte seien die Wahlwahrscheinlichkeiten p(i) ($i \in \{1, \ldots, m\}$) gleich. Jede Konsumeinheit H_j habe jetzt individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten $p_j(i)$. Die Modellannahmen 4.1.1. sowie 4.1.2.2. bis 4.1.2.4. werden dagegen beibehalten.

Für einen Haushalt H_j ($j \in \{1, \ldots, N\}$) ergibt sich dann analog der Ergebnisse in 4.2.1.:

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim t-ten Wahlvorgang vom j-ten Konsumenten die Marke K_i gewählt wird, beträgt:

$$w_j^{[t]}(K_i) = p_j(i) \quad \text{(IV.6.)}$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb einer Aufeinanderfolge von T Wahlvorgängen 1,...,t,...,T der Konsumeinheit H_j T_1-mal die Marke K_1, T_2-mal die Marke K_2, ... , T_m-mal die Marke K_m gekauft wird, ist durch folgende Multinomialverteilung gegeben:

$$W^{[t]}(T_1,\ldots,T_m) = \frac{T!}{T_1!.\ \ldots\ .T_m!}\ p_j^{T_1}(1).\ \ldots\ .p_j^{T_i}(i).\ \ldots\ .p_j^{T_m}(m) \qquad \text{(IV.7.)}$$

Erwartungswert und Varianz der Anzahl T_{ij} der Käufe der Marke K_i innerhalb einer Folge von T Wahlakten der Einheit H_j erhält man wie folgt:

$$E\ T_{ij} = T.p_j(i) \qquad \text{(IV.7a.)}$$

$$\text{var}\ T_{ij} = T.p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.7b.)}$$

Für die Gesamtheit der N Haushalte erhält man entsprechend:

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim t-ten kollektiven Wahlvorgang die Marken $K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m$ genau $N_1,\ldots,N_i,\ldots,N_m$-mal gewählt werden, kann jetzt nicht mehr mit der Multinomialverteilung dargestellt werden, weil die $p_j(i)$ nicht mehr voraussetzungsgemäß für alle Haushalte gleich sind. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeiten $W^{[t]}(N_i)$ dafür, daß beim t-ten kollektiven Wahlvorgang die Marke K_i genau N_i-mal gewählt wird. Sie werden erzeugt (vgl. den sich auf FELLER [38, S.248 ff.] und BHARUCHA-REID [9,S.439-442] stützenden einführenden Abschnitt zur Theorie der erzeugenden Funktionen im Anhang dieser Arbeit) durch die Funktion

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{N} (1-p_j(i) + z.p_j(i)) \qquad \text{(IV.8.)}$$

und man erkennt, daß die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten $W^{[t]}(N_i)$ mittels N_i-maliger Differentiation nach z nicht weiterführt. Wir begnügen uns deshalb mit der Errechnung des Erwartungswertes und der Varianz der Zufallsvariablen N_i unter den revidierten Modellannahmen und erhalten

$$E\ N_i = \sum_{j=1}^{N} p_j(i) = N.\bar{p}(i) \qquad \text{(IV.8a.)}$$

wenn

$$\bar{p}(i) := \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j(i)}{N}$$

definiert ist als die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit der Wahl der Marke K_i;

sowie, wegen der in der Annahme 4.1.2.4. enthaltenen Hypothese der

stochastischen Unabhängigkeit der Wahlvorgänge der N Haushalte,

$$\text{var } N_i = \sum_{j=1}^{N} p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.8b.)}$$

(2) Für T aufeinanderfolgende kollektive Wahlakte, also insgesamt M = N.T einzelne Wahlvorgänge erhält man demnach bei den gegebenen Modellannahmen für die Zufallsvariable M_i

$$E\, M_i = T.E\, N_i = N.T.\bar{p}(i) \qquad \text{(IV.9a.)}$$

und, wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Wahlvorgänge im Zeitablauf gemäß Annahme 4.1.1.,

$$\text{var } M_i = T.\text{var } N_i = T.\sum_{j=1}^{N} p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.9b.)}$$

als Erwartungswert bzw. Varianz der Anzahl der Käufe der Marke K_i.

Mittels (IV.9a.) und (IV.9b.) bekommt man Erwartungswert und Varianz des mengenmäßigen Marktanteils $A^{[1,T]}(i)$ der Marke K_i für T Wahlperioden unter den diesem Abschnitt zugrundeliegenden Voraussetzungen wie folgt:

$$E\, A^{[1,T]}(i) = \frac{1}{M}.E\, M_i = \bar{p}(i) \qquad \text{(IV.10a.)}$$

$$\text{var } A^{[1,T]}(i) = \frac{1}{M^2}.\text{var } M_i = \frac{1}{M^2}.T.\sum_{j=1}^{N} p_j(i)(1-p_j(i))$$

$$= \frac{1}{N^2.T}\sum_{j=1}^{N} p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.10b.)}$$

Der Marktanteil $A^{[1,T]}(i)$ einer Marke K_i ist unter den angenommenen Bedingungen also erwartungsgemäß gleich der durchschnittlichen Wahlwahrscheinlichkeit für diese Marke.

4.3.2. Individuelle Kaufintervalle

In Abänderung der Annahme 4.1.2.2. wird zusätzlich die Hypothese fallengelassen, von allen N Konsumeinheiten würde in gleichem Rhythmus eine einheitliche Quantität des Konsumgutes K gekauft. Jeder Haushalt kaufe jetzt innerhalb eines Zeitraumes von T Zeiteinheiten eine individuell verschiedene, gegebene, also nicht zufällige, Anzahl von $T_{.j}$ einheitlichen Mengen des Konsumgutes K mit den Wahlwahrscheinlich-

keiten $p_j(i)$ für die Gütermarken K_j. Die Annahmen 4.1.1., 4.1.2.3. und 4.1.2.4. sowie die in 4.3.1. formulierte Annahme individueller Wahlwahrscheinlichkeiten werden dagegen beibehalten.

Für einen Haushalt H_j $(j \in \{1,\ldots,N\})$ erhält man dann:

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim t-ten Wahlvorgang (t=1,2, ...) vom j-ten Konsumenten eine Marke K_i gewählt wird, beträgt unverändert

$$w_j^{[t]}(K_i) = p_j(i) \qquad \text{(IV.11.)}$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit $w^{[1,T]}(T_{1j},\ldots,T_{mj})$ dafür, daß innerhalb eines Zeitraumes von T Zeiteinheiten, in dem beim Haushalt H_j genau $T_{.j}$ Wahlvorgänge stattfinden, die Marken $K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m$ genau $T_{1j},\ldots, T_{ij},\ldots,T_{mj}$-mal von der Konsumeinheit H_j gewählt werden, beträgt:

$$w^{[1,T]}(T_{1j},\ldots,T_{mj}) = \frac{T_{.j}!}{T_{1j}!\cdot\ldots\cdot T_{mj}!}\, p_j^{T_{1j}}(1)\cdot\ldots\cdot p_j^{T_{ij}}(i)\cdot\ldots\cdot p_j^{T_{mj}}(m)$$

(IV.12.)

mit

$$E\, T_{ij} = T_{.j}\cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.12a.)}$$

und

$$\operatorname{var} T_{ij} = T_{.j}\cdot p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.12b.)}$$

Wir gehen über zu der Gesamtheit aller N Konsumenten und betrachten eine Periode von T Zeiteinheiten, in der individuell verschiedene Anzahlen $T_{.j}$ von Kaufakten mit individuellen Wahlwahrscheinlichkeiten vorkommen. Unter Berücksichtigung obiger Ergebnisse erhält man unter den jetzt geltenden Bedingungen Erwartungswert und Varianz der Gesamtanzahl $M_i = \sum_{j=1}^{N} T_{ij}$ der Entscheidungen für die Gütermarke K_i in dieser Periode wie folgt:

$$E\, M_i = E\left(\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{N} E\, T_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T_{.j}\cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.13a.)}$$

$$\operatorname{var} M_i = \operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{var} T_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T_{.j}\cdot p_j(i)(1-p_j(i))$$

(IV.13b.)

Damit ergeben sich hier Erwartungswert und Varianz des mengenmäßigen Marktanteils

$$A^{[1,T]}(i) = \frac{M_i}{M} = \frac{\sum_{j=1}^{N} T_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} T_{.j}}$$

für eine T Zeiteinheiten umfassende Periode wie folgt:

$$E\, A^{[1,T]}(i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} T_{.j} \cdot p_j(i)}{\sum_{j=1}^{N} T_{.j}} \qquad \text{(IV.14a.)}$$

und

$$\operatorname{var} A^{[1,T]}(i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} T_{.j} \cdot p_j(i)(1-p_j(i))}{\left(\sum_{j=1}^{N} T_{.j}\right)^2} \qquad \text{(IV.14b.)}$$

Erwartungsgemäß ist also unter den für den Abschnitt 4.3.2. geltenden Bedingungen der mengenmäßige Marktanteil der Gütermarken K_i gleich dem mit den individuellen Verbräuchen gewichteten Durchschnitt der individuellen Wahlwahrscheinlichkeiten.

4.3.3. Standard- und Großpackungen

Im vorhergehenden Abschnitt wurde davon ausgegangen, daß jeder Haushalt in einem Zeitraum von T Zeiteinheiten $T_{.j}$ Quantitäten einheitlicher Größe des als Menge von Marken aufgefaßten Konsumgutes K nachfragt. Kommen Mehrfachkäufe vor, also Käufe mehrerer Einheiten eines Konsumgutes im Verlauf eines einzigen Wahlvorganges, so kann man sicherlich ohne unrealistisch zu sein annehmen, daß dabei nur Einheiten ein und derselben Marke gekauft werden. Folgerichtig ist, in diesem Paragraphen solche Mehrfachkäufe als stochastisch unabhängige Einzelwahlvorgänge aufzufassen, woraus eine Vergrößerung der Varianz der Marktanteile resultiert. Darauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden. Die Möglichkeit von Mehrfachkäufen wird im nächsten Paragraphen nocheinmal zur Sprache kommen.

Dagegen muß in diesem Abschnitt noch eine Variation der akzessorischen Annahme 4.1.2.3. in Betracht gezogen werden. Auch eine Korrektur dieser vereinfachenden Annahme verursacht hier wegen der Grundannahme

stochastischer Unabhängigkeit der Wahlakte keine Komplikationen. Abänderungen der Annahme 4.1.2.3. sind natürlich in vielen Richtungen möglich. Hier sei zu dieser Frage nur ein besonders einfaches spezielles Beispiel diskutiert.

Es seien jetzt bei jeder Marke zwei Packungsgrößen zugelassen, nämlich eine Standardpackung und eine Großpackung, wobei die Großpackung die d-fache Menge der Standardpackung umfaßt. Der Faktor d sei ebenso wie die Größe der Standardpackung für alle Marken K_i des Konsumgutes gleich. Im Hinblick auf die Realität ist diese Annahme nicht allzu restriktiv. Eine Einheitlichkeit der Produktgestaltung bezüglich verschiedener angebotener Packungsgrößen läßt sich bei konkurrierenden Markenartikelherstellern tendenziell in manchen Bereichen nachweisen, etwa bei Zigaretten, Kaffee, Waschmitteln, Getränken. Natürlich ist diese Annahme keineswegs generell gültig. Sie trifft vor allem nicht zu bei Markenartikeln wie etwa Kraftstoff, die in variablen und nicht standardisierbaren Mengen abgegeben werden.

Für eine Konsumeinheit H_j $(j \in \{1,\dots,N\})$ sei die Wahrscheinlichkeit, eine Marke K_i $(i \in \{1,\dots,m\})$ zu wählen, wiederum $p_j(i)$. In einem Zeitraum von T Zeiteinheiten würden, so wird jetzt vorausgesetzt, von der Verbrauchseinheit H_j eine gegebene Anzahl von $T_{\cdot j}$ Wahlakten vorgenommen, wovon bei $T'_{\cdot j}$ bzw. $T''_{\cdot j}$ Wahlvorgängen eine Standard- bzw. Großpackung gewählt wird. $T'_{\cdot j}$ und $T''_{\cdot j}$ seien ebenfalls gegebene Größen, keine Zufallsvariablen. Die Entscheidung für eine Gütermarke sei unabhängig von der gewählten Packungsgröße.

Unter Zugrundelegung der Annahme 4.1.1., der in 4.3.1. und 4.3.2. formulierten korrigierten akzessorischen Hypothesen sowie der Annahme 4.1.2.4. ergibt sich bei Zulassung von zwei Packungsgrößen für eine Konsumeinheit H_j:

Die Wahrscheinlichkeit $w^{[1,T]}(T'_{ij})$ bzw. $w^{[1,T]}(T''_{ij})$ dafür, daß innerhalb eines Zeitraumes von T Zeiteinheiten, in dem $T'_{\cdot j}$-mal eine Standardpackung und $T''_{\cdot j}$-mal eine Großpackung ausgewählt wird, die Marke K_i genau T'_{ij}-mal bzw. T''_{ij}-mal gekauft wird, beträgt:

$$w^{[1,T]}(T'_{ij}) = \frac{T'_{\cdot j}!}{T'_{ij}!(T'_{\cdot j}-T'_{ij})!}\; p_j^{T'_{ij}}(i)(1-p_j(i))^{T'_{\cdot j}-T'_{ij}} \qquad \text{(IV.15'.)}$$

bzw.

$$W^{[1,T]}(T''_{ij}) = \frac{T''_{.j}!}{T''_{ij}!(T''_{.j}-T''_{ij})!}\, p_j^{T''_{ij}}(i)(1-p_j(i))^{T''_{.j}-T''_{ij}} \qquad \text{(IV.15".)}$$

mit

$$E\, T'_{ij} = T'_{.j} \cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.15'a.)}$$

bzw.

$$E\, T''_{ij} = T''_{.j} \cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.15"a.)}$$

und

$$\text{var}\, T'_{ij} = T'_{.j} \cdot p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.15'b.)}$$

bzw.

$$\text{var}\, T''_{ij} = T''_{.j} \cdot p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.15"b.)}$$

Für alle N Konsumeinheiten und für eine Periode von T Zeitabschnitten erhält man unter den hier zugrundeliegenden Bedingungen Erwartungswert und Varianz der Gesamtanzahl M'_i und M''_i der Käufe von Standard- bzw. Großpackungen der Marke K_i des Konsumgutes K wie folgt:

$$E\, M'_i = \sum_{j=1}^{N} E\, T'_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T'_{.j} \cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.16'a.)}$$

bzw.

$$E\, M''_i = \sum_{j=1}^{N} E\, T''_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T''_{.j} \cdot p_j(i) \qquad \text{(IV.16"a.)}$$

und

$$\text{var}\, M'_i = \sum_{j=1}^{N} \text{var}\, T'_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T'_{.j} \cdot p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.16'b.)}$$

bzw.

$$\text{var}\, M''_i = \sum_{j=1}^{N} \text{var}\, T''_{ij} = \sum_{j=1}^{N} T''_{.j} \cdot p_j(i)(1-p_j(i)) \qquad \text{(IV.16"b.)}$$

Der mengenmäßige Marktanteil $A^{[1,T]}(i)$ der Marke K_i ist hier definitionsgemäß

$$A^{[1,T]}(i) = \frac{M'_i + d.M''_i}{M' + d.M''} \quad ,$$

wenn man setzt: $M' = \sum_{j=1}^{N} T'_{.j}$ und $M'' = \sum_{j=1}^{N} T''_{.j}$. Man erhält deshalb für die ersten beiden Momente dieser Größen ($i \in \{1,\ldots,m\}$):

$$E\,A^{[1,T]}(i) = \frac{1}{M' + d.M''}\,(E\,M'_i + d.E\,M''_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} T'_{.j}\cdot p_j(i) + d.\sum_{j=1}^{N} T''_{.j}\cdot p_j(i)}{M' + d.M''}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N}(T'_{.j} + d.T''_{.j}).p_j(i)}{\sum_{j=1}^{N}(T'_{.j} + d.T''_{.j})} \qquad \text{(IV.17a.)}$$

und

$$\text{var}\,A^{[1,T]}(i) = \frac{\text{var}\,M'_i + d^2.\text{var}\,M''_i}{(M' + d.M'')^2}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N} T'_{.j}\cdot p_j(i)(1-p_j(i)) + d^2.\sum_{j=1}^{N} T''_{.j}\cdot p_j(i)(1-p_j(i))}{(M' + d.M'')^2}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N}(T'_{.j} + d^2.T''_{.j})p_j(i)(1-p_j(i))}{\sum_{j=1}^{N}(T'_{.j} + d.T''_{.j})^2} \qquad \text{(IV.17b.)}$$

Der erwartungsgemäße Marktanteil der Gütermarken K_i ist also auch hier gleich dem mit den individuellen mengenmäßigen Verbräuchen $(T'_{.j} + d.T''_{.j})$ gewichteten Durchschnitt der individuellen Wahlwahrscheinlichkeiten.

4.3.4. Im Zeitablauf variierende Wahlwahrscheinlichkeiten

Der Gedanke liegt nahe, auch die Hypothese 4.1.2.4. abzubauen und eine Variabilität der individuellen Wahlwahrscheinlichkeiten im Zeitablauf in Betracht zu ziehen. Man wird dann unter Beibehaltung der grundsätzlichen Hypothese der stochastischen Unabhängigkeit der Wahlakte im Zeitablauf die Wahlwahrscheinlichkeiten als Funktionen einer oder mehrerer Variabler auffassen.

Zunächst bietet sich dabei die Zeit als erklärende Variable an. Da aber mit Hilfe des Zeitablaufes als unabhängiger Größe im Grunde nichts erklärt werden kann, muß dieser Gedanke von vornherein verworfen werden. Ungleich sinnvoller erscheint es dagegen, die Wahlwahrscheinlichkeiten als Funktionen vom Haushaltseinkommen oder dessen Änderungen oder von einigen oder allen Preisen oder von Preisänderungen anzusetzen, insbesondere auch die Wahlwahrscheinlichkeiten $p_j(i)$ als Funktionen des Preises der Marke K_i zu definieren. Damit wäre eine Wieder-

annäherung an die Grundvorstellungen der gängigen Nachfragetheorie vollzogen; Preise oder Einkommen würden wiederum die Schlüsselrolle bei der Erklärung von Wahlakten der Haushalte innehaben, und man würde trotzdem durch die Verwendung von Wahlwahrscheinlichkeiten anstelle von direkten funktionalen Abhängigkeiten auf das fragwürdig gewordene Instrument der Nachfragefunktion verzichten. Allerdings muß dabei unter anderem sofort wieder die Frage nach Art und Anzahl der zu berücksichtigenden erklärenden Variablen gestellt werden, die in der Theorie des Haushalts bisher keine vollständige Beantwortung gefunden hat (vgl. S.15 ff.).

Es fehlt also nicht an Möglichkeiten, das in diesem Paragraphen besprochene Modell der Markenwahl als Folge unabhängiger Versuche mit der herkömmlichen Haushaltstheorie in Beziehung zu bringen. Auf eine Konkretisierung solcher Gedankengänge in Form eines auf entsprechenden Hypothesen aufgebauten Modells soll jedoch hier - schon wegen der recht wirklichkeitsfernen Grundannahme, die diesen Paragraphen kennzeichnet - verzichtet werden. Man vergleiche die entsprechenden Ausführungen im nächsten Paragraphen.

4.4. Kleine Modellkritik

In bezug auf eine Prognose der Entwicklung der Marktanteile einzelner Marken erhält man, wie die obigen Betrachtungen gezeigt haben, unter den in diesem Paragraphen formulierten Hypothesen besonders einfache Ergebnisse. Für alle ausführlich besprochenen Varianten des hier behandelten Modells sind Erwartungswert und Varianz des Marktanteils einer Marke mittels einfacher Formeln anzugeben und im Zeitablauf invariant. Dies gilt allerdings nicht für den im Abschnitt 4.3.4. kurz skizzierten Fall im Zeitablauf variabler Wahlwahrscheinlichkeiten. Die Zusammenfassung mehrerer Marken zu einer Aggregatmarke, etwa aller Marken mit Ausnahme von K_i zu einer Aggregatmarke "Nicht-K_i", ist aufgrund der Möglichkeit der Rückführung der Multinomialverteilung auf das vereinfachte BERNOULLIsche Schema mit zwei Ausprägungen leicht durchführbar. Diese Feststellung ist im Hinblick auf später zu behandelnde Modelle wesentlich. Auch der Übergang zur Betrachtung aller Haushalte einer Volkswirtschaft, also die Aggregation individueller Markenwahlprozesse, ist in diesem Paragraphen nicht mit Schwierigkeiten verbunden.

Die Realität zeigt, daß im Zeitablauf weitgehend invariante Marktanteile einzelner Produzenten recht oft beobachtet werden können. Diese Erscheinung mittels stochastischer Unabhängigkeit sukzessiver individueller Wahlakte zu erklären kann jedoch von vornherein nicht als sehr realistisch gelten. Denn eine solche Hypothese wäre gleichbedeutend mit der Vorstellung des konsumierenden Menschen als eines gedächtnis- und erfahrungslosen Wesens oder als eines perfekten homo stochasticus. Die Grundannahme 4.1.1. als Haupthypothese dieses Paragraphen muß daher ebenfalls abgebaut und durch eine vernünftigere Annahme ersetzt werden, die unter anderem auch eine einleuchtendere Erklärung für variierende oder konstante Marktanteile ergibt.

§ 5 Markenwahl als MARKOVsche Kette erster Ordnung

Eine theoretisch immer noch recht einfache, wenn auch schon beträchtlichen Aufwand an Mathematik erfordernde Berücksichtigung des Lernverhaltens der Konsumeinheiten bei der Markenwahl ergibt sich, wenn man annimmt, die t-te Entscheidung für eine bestimmte Marke K_{i_t} des Konsumgutes K erfolge in stochastischer Abhängigkeit vom Ergebnis der zeitlich direkt vorhergehenden (t-1)-ten Markenwahl für dasselbe Konsumgut, nicht aber von zeitlich weiter zurückliegenden Wahlentscheidungen. Man geht also davon aus, daß der Konsument bei der Markenwahl seine konsumtive Erfahrung in begrenztem Umfange berücksichtigt, oder, daß sein Gedächtnis bei der Entscheidung für eine Gütermarke nur bis zur vorhergehenden Markenwahl für dasselbe Wirtschaftsgut zurückreicht.

Diese Annahme stellt eine ziemlich fundamentale Abänderung der Grundhypothese 4.1.1. dar, die zunächst formal und begrifflich konkretisiert und durch akzessorische Annahmen ergänzt werden muß.

5.1. Katalog der Modellannahmen

5.1.1. Die Wahrscheinlichkeit $W_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots K_{i_t})$ dafür, daß die Ausgangssituation der Verbrauchseinheit H_j durch den Konsum der Marke K_{i_0} gekennzeichnet ist, und die Marken $K_{i_1},\ldots,K_{i_T}$ in einer Aufeinanderfolge von T Wahlakten (T=1,2,...) in der angegebenen Reihenfolge ausgewählt werden, erfülle folgende Beziehung:

$$w_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T}) = w_j^{[0]}(K_{i_0}).w_j^{[1]}(K_{i_1}/K_{i_0}). \ldots .w_j^{[T]}(K_{i_T}/K_{i_{T-1}})$$

$w_j^{[0]}(K_{i_0})$ ist dabei die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Haushalt H_j ursprünglich die Marke K_{i_0} verbraucht. Weiter ist $w_j^{[t]}(K_{i_t}/K_{i_{t-1}})$ als Wahrscheinlichkeit dafür definiert, daß beim mit t bezeichneten Wahlvorgang, also beim Wahlvorgang, der zu Beginn der t-ten Periode erfolgt, die Marke K_{i_t} gewählt wird, wenn beim unmittelbar vorhergehenden und mit (t-1) numerierten Wahlakt die Marke $K_{i_{t-1}}$ gekauft wurde. $w_j^{[t]}(K_{i_t}/K_{i_{t-1}})$ ist also eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die den Übergang von der Marke $K_{i_{t-1}}$ zur Marke K_{i_t} mißt.

Im Paragraphen 4 gingen wir von der Unabhängigkeitsbedingung

$$w_j^{[t]}(K_{i_t}/K_{i_{t-1}}) = w_j^{[t]}(K_{i_t})$$

zeitlich aufeinanderfolgender Wahlentscheidungen aus, die jetzt nicht mehr gültig ist. Insofern handelte es sich bei der Grundannahme 4.1.1. (S.33/34) um einen Spezialfall dieser Annahme 5.1.1.

Die oben genannte Beziehung kann rekursiv wie folgt formuliert werden:

$$w_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T}) = w_j^{[T]}(K_{i_T}/K_{i_{T-1}}).w_j^{[0,T-1]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_{T-1}})$$

Die Wahrscheinlichkeit des Überganges von der Marke $K_{i_{T-1}}$ zur Marke K_{i_T} ist demnach bedingt nur in bezug auf das Ereignis $K_{i_{T-1}}$, nicht jedoch in bezug auf die Ereignisse $K_{i_{T-2}},\ldots,K_{i_0}$. Die hier zugrundegelegte Hypothese entspricht also in der Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. z. B. FELLER [38,S.340], GNEDENKO [52,S.104], FISZ [47,S.211], RENYI [119,S.392]) einer einfachen MARKOVschen Kette oder MARKOVschen Kette erster Ordnung mit m, also endlich vielen Zuständen, wenn angenommen wird, daß bei jedem - jetzt nicht mehr im Zeitverlauf stochastisch unabhängigen - Versuch, also jedem Markenwahlvorgang, genau eines von m unvereinbaren Ereignissen $K_1,\ldots,K_m$ eintreten kann, also genau eine Marke gewählt wird. Die m möglichen Ergebnisse eines Wahlvorganges werden in Anlehnung an die Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinfort gelegentlich als Zustände bezeichnet.

Wir definieren: $w_j^{[t]}(K_k/K_i) := p_j^{[t]}(i,k)$ als Übergangswahrscheinlichkeit der Einheit H_j von der Marke K_i zur Marke K_k $(i,k \in \{1,\ldots,m\})$

beim t-ten Wahlvorgang und $W_j^{[0]}(K_i) := a_j^{(0)}(i)$ als unbedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei Beginn des Prozesses vom Haushalt H_j die Marke K_i verbraucht wird. Es sei außerdem

$$\vec{a}_j^{(0)} := (a_j^{(0)}(1),\ldots,a_j^{(0)}(i),\ldots,a_j^{(0)}(m))$$

der Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten der Einheit H_j mit $\sum_{i=1}^{m} a_j^{(0)}(i) = 1$ und

$$\mathfrak{M}_j^{[t]} = \begin{bmatrix} p_j^{[t]}(1,1) & \ldots & \ldots & p_j^{[t]}(1,m) \\ \vdots & & & \\ & & p_j^{[t]}(i,k) & \vdots \\ p_j^{[t]}(m,1) & & \ldots & p_j^{[t]}(m,m) \end{bmatrix}$$

die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t des Haushalts H_j. Dann läßt sich mittels des Vektors $\vec{a}_j^{(0)}$ und der Matrizen $\mathfrak{M}_j^{[1]}, \mathfrak{M}_j^{[2]},\ldots, \mathfrak{M}_j^{[t]},\ldots, \mathfrak{M}_j^{[T]},\ldots$ der Prozeß der Markenwahl der Einheit H_j vollständig beschreiben.

Die Matrizen $\mathfrak{M}_j^{[t]}$ sind stochastische Matrizen (vgl. z. B. die Definition bei DOOB [29,S.172]), d. h., sie sind quadratisch, und für ihre Elemente gelten die Bedingungen $0 \leq p_j^{[t]}(i,k) \leq 1$ sowie $\sum_{k=1}^{m} p_j^{[t]}(i,k) = 1$.

5.1.2. Unter Berücksichtigung der Systematik der Hypothesen 4.1.2.1. bis 4.1.2.4. (vgl. S. 34-35) gehen wir zunächst von folgenden restriktiven akzessorischen Annahmen aus:

5.1.2.1. Die Vektoren $\vec{a}_j^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die Übergangsmatrizen $\mathfrak{M}_j^{[t]}$ $(t=1,2,\ldots)$ seien für alle N Konsumeinheiten der Volkswirtschaft gleich. Es gelte also:

$$\vec{a}_1^{(0)} = \ldots = \vec{a}_j^{(0)} = \ldots = \vec{a}_N^{(0)} := \vec{a}^{(0)} = (a^{(0)}(1),\ldots,a^{(0)}(m))$$

sowie

$$\mathfrak{M}_1^{[t]} = \ldots = \mathfrak{M}_j^{[t]} = \ldots = \mathfrak{M}_N^{[t]} := \mathfrak{M}^{[t]} = (p^{[t]}(i,k))$$

5.1.2.2. Jeder der Haushalte H_j kaufe zu Beginn jeder Periode genau eine Quantität einer Marke K_i des Konsumgutes K. Diese Annahme entspricht also genau der Annahme 4.1.2.2.

5.1.2.3. Alle Marken würden nur in einer einheitlichen und gleichen

Quantität angeboten und nachgefragt. Auch diese Hypothese ist gleichlautend mit der entsprechenden Hypothese 4.1.2.3. des vorhergehenden Paragraphen.

5.1.2.4. Die Matrizen $\mathfrak{M}_j^{[1]},\ldots,\mathfrak{M}_j^{[t]},\ldots,\mathfrak{M}_j^{[T]},\ldots$ der Übergangswahrscheinlichkeiten seien unabhängig von der Nummer bzw. dem Zeitpunkt des Wahlvorganges; es gelte also:

$$\mathfrak{M}_j^{[1]} = \ldots = \mathfrak{M}_j^{[t]} = \ldots = \mathfrak{M}_j^{[T]} = \ldots = \mathfrak{M}_j = \mathfrak{M} = (p(i,k))$$

(wegen 5.1.2.1.)

Das heißt, es ändern sich zwar die Wahlwahrscheinlichkeiten nach Maßgabe des zugrundegelegten Lernverhaltens der Konsumeinheiten, nicht jedoch das durch die Übergangsmatrix zum Ausdruck gebrachte Lernverhalten selbst. Es handelt sich also bei diesem Modell um eine homogene MARKOVsche Kette (vgl. z. B. FISZ [47,S.211]) oder eine MARKOVsche Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten (DOOB [29,S.171]; CRAMER und LEADBETTER [26,S.120 ff.]).

Zur Veranschaulichung dieses Hypothesensystems sei das ihm entsprechende Urnenmodell beschrieben (vgl. hierzu FELLER [38,S.339]). Gegeben seien (m+1) Urnen $U_0,U_1,\ldots,U_i,\ldots,U_m$, deren Elemente je in m Sorten aufgeteilt sind. Der Anteil der Sorte i ($i\in\{1,\ldots,m\}$) an der Gesamtzahl der Elemente der jeweiligen Urne betrage $a^{(0)}(i)$ für U_0, $p(1,i)$ für $U_1,\ldots,p(i,i)$ für $U_i,\ldots,p(m,i)$ für U_m.

Der Prozeß der Markenwahl eines einzelnen Haushaltes gemäß den formulierten Modellannahmen entspricht dann folgendem Zufallsexperiment: Zunächst wird aus U_0 zufällig ein Element entnommen. Gehört dieses zur Sorte k_1, so wird anschließend aus der Urne U_{k_1} ein Element zufällig mit Zurücklegen gezogen. Erhielt man ein Element der Sorte k_2, so wird jetzt der Urne U_{k_2} ein Element mit Zurücklegen entnommen, und so fort ($k_1,k_2,\ldots\in\{1,\ldots,m\}$). Das Ergebnis einer Entnahme bestimmt also die Urne, aus der die nächste Ziehung erfolgt. Der Prozeß der Markenwahl wird für die gesamte, N Haushalte umfassende Volkswirtschaft durch N simultan erfolgende und genau gleich angelegte solche Zufallsexperimente repräsentiert.

5.2. Einzelwirtschaftliche Modellanalyse

Die Analyse des durch die Hypothesen 5.1.1. und 5.1.2.1. bis 5.1.2.4. festgelegten Modells der Markenwahl ist wegen der angenommenen stochastischen Abhangigkeit sukzessiver Wahlvorgänge mit dem einfachen wahrscheinlichkeitstheoretischen Instrumentarium, das für das Unabhängigkeitsmodell des Paragraphen 4 genügte, nicht mehr zu bewältigen. Dennoch soll in diesem Paragraphen die Gedankenfolge des Paragraphen 4 grundsätzlich beibehalten werden. Allerdings erfordert das jetzt zur Diskussion stehende Modell die Berücksichtigung einiger Probleme, die für das Unabhängigkeitsmodell gar nicht anfallen. Insbesondere müssen die Möglichkeiten der Zusammenfassung mehrerer Gütermarken zu einer Aggregatmarke untersucht werden. Diese Zusammenfassung war im letzten Paragraphen ohne Schwierigkeiten möglich (vgl. Abschnitt 4.4. S.47). Außerdem legt die diesem neuen Modell zugrundeliegende Vorstellung eine Trennung der Untersuchung für den Fall endlich vieler und unendlich vieler sukzessiver Markenwahlakte jedes Konsumenten nahe.

5.2.1. Der einzelwirtschaftliche Markenwahlprozeß bei einer endlichen Anzahl von sukzessiven Wahlvorgängen

Wir definieren zunächst $p^{(t)}(i,k)$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim t-ten Übergang von einem Haushalt die Marke K_k gewählt wird, wenn gegeben ist, daß im Ausgangszustand die Marke K_i verbraucht wurde. $p^{(t)}(i,k)$ ist demgemäß eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die den Übergang von der Marke K_i zur Marke K_k in genau t Markenwahlakten mißt, also eine mehrstufigen und indirekten Übergängen zugeordnete Wahrscheinlichkeit. Man bemerke den Unterschied zwischen dieser Definition für $p^{(t)}(i,k)$ und der Definition für $p^{[t]}(i,k)$ S. 49-50.

Dann gilt zunächst:

$$p^{(1)}(i,k) = p(i,k)$$

und

$$p^{(2)}(i,k) = \sum_{\nu=1}^{m} p(i,\nu).p(\nu,k)$$

Endliche Induktion nach t ergibt (t=2,3,...) die rekursive Beziehung

$$p^{(t)}(i,k) = \sum_{\nu=1}^{m} p^{(t-1)}(i,\nu).p(\nu,k)$$

aus der folgt:

$$p^{(t)}(i,k) = \sum_{\nu_1=1}^{m} \sum_{\nu_2=1}^{m} p^{(t-2)}(i,\nu_2).p(\nu_2,\nu_1).p(\nu_1,k) \qquad (V.1'.)$$

$$= \dots = \sum_{\nu_1=1}^{m} \dots \sum_{\nu_{t-2}=1}^{m} \sum_{\nu_{t-1}=1}^{m} p(i,\nu_{t-1}).p(\nu_{t-1},\nu_{t-2}). \dots .p(\nu_1,k) \qquad (V.1.)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} p^{(t_1)}(i,\nu).p^{(t-t_1)}(\nu,k) \quad (1 \leq t_1 < t) \qquad (V.1".)$$

(V.1".) stellt eine speziellere Variante der sogenannten CHAPMAN-KOLMOGOROV-Gleichung dar (vgl. z. B. PRABHU [117,S.43], ROSENBLATT [125, S.38], PARZEN [116,S.194]). Ordnet man auch die Wahrscheinlichkeiten $p^{(t)}(i,k)$ in einer m-reihigen stochastischen Matrix $\mathfrak{M}^{(t)} = (p^{(t)}(i,k))$ an, so ergibt sich aus diesen Beziehungen zunächst

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}^2 \qquad \text{sowie}$$

$$\mathfrak{M}^{(t)} = \mathfrak{M}^{(t-1)}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(t-2)}\mathfrak{M}^2 = \dots = \mathfrak{M}^t = \mathfrak{M}^{t_1}.\mathfrak{M}^{t-t_1} \qquad (V.2.)$$

Wir bezeichnen weiter (vgl. z. B. FELLER [38,S.349]) als absolute Wahrscheinlichkeit $a^{(t)}(k)$ die unbedingte Wahrscheinlichkeit der Wahl der Marke K_k durch einen Haushalt beim t-ten Markenwahlvorgang. Außerdem sei

$$\vec{a}^{(t)} = (a^{(t)}(1),\dots,a^{(t)}(k),\dots,a^{(t)}(m))$$

der aus m Komponenten bestehende Vektor dieser Größen.

(1) Aus obigen Beziehungen zwischen stochastischen Matrizen, die mehrstufige Übergänge charakterisieren, erhält man unter Verwendung von Anfangswahrscheinlichkeiten sofort:

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)}.\mathfrak{M}^t \qquad (V.3.)$$

Bei gegebenem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten und gegebener Matrix $\mathfrak{M}$ der Übergangswahrscheinlichkeiten läßt sich mittels (V.3.) die Wahlsituation der betrachteten Konsumeinheit nach t Wahlvorgängen wahrscheinlichkeitstheoretisch prognostizieren. Die Prognose ist für alle Haushalte aufgrund der Form der Beziehung (V.3.) und wegen der Annahme 5.1.2.1. gleich. Wie $\mathfrak{M}^{(t)} = \mathfrak{M}^t$ bequem errechnet werden kann,

soll erst später (vgl. Abschnitt 5.4.) zur Sprache kommen.

(2) Mit Rücksicht auf Überlegungen, die im Abschnitt 4.2.1. (S.35 ff.) angestellt wurden, erscheint es auch notwendig, eine Aufeinanderfolge von T (T=1,2,...) Markenwahlakten eines Haushalts, etwa zu den Zeitpunkten $\tau+1, \tau+2, \ldots, \tau+t, \ldots, \tau+T$, zu analysieren. Aus (V.3.) erhält man zunächst

$$\vec{a}(\tau+1) = (a^{(\tau+1)}(1), \ldots, a^{(\tau+1)}(i), \ldots, a^{(\tau+1)}(m)) = \vec{a}^{(0)} . \mathfrak{M}^{\tau+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vec{a}(\tau+t) = \vec{a}^{(0)} . \mathfrak{M}^{\tau+t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vec{a}(\tau+T) = \vec{a}^{(0)} . \mathfrak{M}^{\tau+T}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

als Vektoren der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten zu den Zeitpunkten $\tau+1, \ldots, \tau+t, \ldots, \tau+T, \ldots$.

Als Erwartungswert für die Anzahl T_k der Käufe der Marke K_k innerhalb einer Aufeinanderfolge von T Wahlakten eines Haushalts ergibt sich, wenn der erste Wahlvorgang die Nummer $\tau+1$ trägt:

$$E\, T_k = \sum_{t=1}^{T} a^{(\tau+t)}(k) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i) . p^{(\tau+t)}(i,k) \qquad (V.4.)$$

Auf weitere Überlegungen in diesem Zusammenhang, insbesondere auch auf die hier schon schwierige Ermittlung von var T_k, sei verzichtet. Denn die prognostische Relevanz des hier zur Debatte stehenden Modells beruht, wie bald offensichtlich werden wird, in erster Linie auf der Möglichkeit, eine unendliche Folge von Markenwahlvorgängen zu untersuchen.

5.2.2. Definition und Interpretation einer stationären Endsituation für die Markenwahlvorgänge in einer Verbrauchseinheit

Die Frage, wohin der lerntheoretisch konzipierte Markenwahlprozeß nach sehr vielen Wahlvorgängen führt, mit anderen Worten also die Frage, ob unter den angenommenen Bedingungen letzten Endes eine irgendwie geartete Stabilität des Wahlprozesses einer Konsumeinheit resultiert, er-

wies sich beim Unabhängigkeitsmodell (§ 4) als trivial. Es wurden nicht nur die Übergangswahrscheinlichkeiten als konstant, sondern auch die einzelnen Wahlvorgänge als stochastisch unabhängig von vorhergehenden Wahlakten angenommen. Für sukzessive Wahlvorgänge ergab sich deshalb keine Tendenz zu anderen Wahlwahrscheinlichkeiten, das Wahlverhalten der Haushalte blieb infolge der Modellvoraussetzungen im Zeitablauf von vornherein invariant.

Dem ist unter den neuen Bedingungen nicht mehr so. Die Spezifikation des Lernverhaltens in Form einer homogenen MARKOVschen Kette erster Ordnung läßt intuitiv vermuten, daß mit steigender Anzahl von Markenwahlvorgängen sich unter gewissen Bedingungen vielleicht eine Endsituation einstellt, die durch im Zeitverlauf konstante, wenn auch gegenüber der Ausgangssituation veränderte absolute Wahlwahrscheinlichkeiten trotz Lernverhaltens der Haushalte gekennzeichnet ist. Eine solche Situation wird hier als stationäre Endsituation bezeichnet.

Zuerst bedarf es einer exakten Festlegung dessen, was als stationäre Endsituation verstanden werden soll. Eine Wahlsituation eines Konsumenten heißt stationär, wenn gilt:

$$\vec{a} := (a(1),\ldots,a(k),\ldots,a(m)) = \vec{a}.\mathfrak{M} \qquad (V.5.)$$

das heißt also, wenn für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$ gilt:

$$a(k) = \sum_{i=1}^{m} a(i).p(i,k) \qquad (V.5'.)$$

Existiert nun für eine gegebene stochastische Übergangsmatrix $\mathfrak{M} = (p(i,k))$ der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t$, existieren also für alle $i,k \in \{1,\ldots,m\}$ die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$, so ist zunächst für alle i und k

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t-1)}(i,k) = \lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$$

Wegen (V.3.) und (V.1'.) gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} a^{(t)}(k) = \sum_{\nu=1}^{m} a^{(0)}(\nu).\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(\nu,k)$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{m} \sum_{\nu_2=1}^{m} a^{(0)}(\nu_1).\lim_{t\to\infty} p^{(t-1)}(\nu_1,\nu_2).p(\nu_2,k)$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{m} \sum_{\nu_2=1}^{m} a^{(0)}(\nu_1).\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(\nu_1,\nu_2).p(\nu_2,k)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \lim_{t\to\infty} a^{(t)}(\nu).p(\nu,k)$$

Man definiert $\lim_{t\to\infty} a^{(t)}(k) := a(k)$ für alle k und erkennt, daß die Stationaritätsbedingung (V.5.) erfüllt ist. Wir fragen daher nach der Existenz und gegebenenfalls nach der Größe der Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$, also nach $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t$.

Gelingt es, die Existenz dieser Grenzwerte nachzuweisen und ihre Größe zu berechnen, so hat man eine Möglichkeit, bei gegebenem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten und gegebener Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ sowie bei Gültigkeit der hier entwickelten Modellvorstellung das Markenwahlverhalten der Haushalte zu prognostizieren. Damit ist, wie noch zu zeigen sein wird, eine Prognosemöglichkeit für die Marktanteile der einzelnen Marken verbunden.

Man kann unter diesen Voraussetzungen dann Feststellungen folgender Art treffen: Nach sehr vielen Käufen ist das Wahlverhalten eines - und unter unseren restriktiven akzessorischen Annahmen jedes - Haushalts durch einen dann im Zeitablauf konstanten Vektor $\vec{a}$ absoluter Wahlwahrscheinlichkeiten charakterisiert. Eine auf der Voraussetzung unendlich vieler sukzessiver Markenwahlvorgänge basierte Argumentation mag auf den ersten Blick unrealistisch erscheinen. Zu bedenken ist aber, daß, was hier zunächst nicht nachgewiesen werden soll, die Wahlsituation eines Haushaltes sich recht schnell an die durch den Vektor $\vec{a}$ der absoluten Grenzwahrscheinlichkeiten gekennzeichnete Situation annähert. Außerdem ist für absatzpolitische Unternehmerentscheidungen auch eine Feststellung von hoher Bedeutung, die besagt, daß sich letztendlich ein Marktanteil bestimmter Größe ergeben würde, wenn sich das durch eine soeben ermittelte Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ beschriebene Wahlverhalten der Haushalte auf längere Frist nicht ändert. Der Einsatz absatzpolitischer Instrumente wie Preispolitik, Produktgestaltung, Werbung, Absatzmethode, der bei der hier gegebenen Modellvorstellung eine Veränderung der Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ bewirkt, kann durch eine solche Voraussage gesteuert werden, wie im dritten Kapitel dieser Arbeit noch diskutiert werden wird.

5.2.3. Klassifikationen von Verbrauchszuständen eines Haushalts und deren nachfragetheoretische Interpretation

Zur Erörterung der Frage, ob eine stationäre Endsituation für einen Markenwahlprozeß vorliegt, werden zunächst definitorisch einige Klassifikationen von MARKOVschen Ketten und insbesondere von Zuständen, in modellbezogener Terminologie also von durch eine bestimmte Marke gekennzeichneten Verbrauchssituationen eines Haushaltes, vorgenommen. Für die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung des Modells ist dies nicht unbedingt notwendig (vgl. z. B. die Darstellung bei DOOB [29,S.170-190]), für die Interpretation im Zusammenhang mit der Markenwahl jedoch vorteilhaft.

Die Darstellung beruht im wesentlichen auf FELLER [38,S.349 ff., vgl. auch Fußnote S.353], obwohl eine etwas andere, auf KOLMOGOROV zurückgehende Einteilung (vgl. z. B. FISZ [47,S.216], GNEDENKO [52,S.108 ff.]; auch PARZEN [116,S.224 ff.] und BHARUCHA-REID [9,S.13 ff.]) ebenfalls gebräuchlich ist. Mit der FELLERschen Einteilung weitgehend übereinstimmende Zustandsklassifikationen sind bei ROSENBLATT [125,S. 52 ff.] und COX und MILLER [24,S.91 ff.] zu finden.

Definition 1a: Eine Teilmenge C der Menge K aller möglichen Zustände einer MARKOVschen Kette erster Ordnung heißt abgeschlossen, wenn kein Zustand außerhalb von C von irgendeinem Zustand in C direkt oder indirekt erreicht werden kann.

Dies ist wegen (V.1.) genau dann der Fall, wenn

$$P(i,k) = \sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(i,k) = 0$$

richtig ist für alle $K_i \in C$ und $K_k \in K/C$.

Die Menge aller Zustände, die von einem Zustand K_i aus erreicht werden können, ist demgemäß abgeschlossen. Sie heißt die dem Zustand K_i zugeordnete abgeschlossene Zustandsmenge und ist die kleinste abgeschlossene Zustandsmenge, die K_i enthält.

Definition 1b: Ein einzelner Zustand, der eine abgeschlossene Zustandsmenge bildet, heißt Absorptionszustand.

Sei K_i ein Absorptionszustand, dann gilt genau

$$P(i,k) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } k \neq i \\ 1 \text{ für } k = i \end{array} \right\}$$

Definition 1c: Eine MARKOVsche Kette heißt irreduzibel, wenn außer der Menge K aller ihrer Zustände keine abgeschlossene Zustandsmenge existiert. Im anderen Falle heißt die Kette reduzibel.

Definition 2a: Ist der Zustand K_i realisiert, so heißt die Anzahl der Perioden bis zum erstmaligen Erreichen eines Zustandes K_k die Wartezeit für den Zustand K_k beim Ausgangszustand K_i.

Sei $\left\{ f^{(t)}(i,k) \right\}$ die Verteilung der Wartezeit für den Zustand K_k beim Ausgangszustand K_i. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß vom Ausgangszustand K_i aus der Zustand K_k jemals erreicht wird, gegeben durch

$$F(i,k) := \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(i,k)$$

Definition 2b: Unter der Rekurrenzzeit eines Zustandes K_i einer MARKOVschen Kette versteht man die Anzahl der Übergänge bis zur ersten Wiederkehr dieses Zustandes.

Sei $\left\{ f^{(t)}(i,i) \right\}$ die Verteilung der Rekurrenzzeit des Zustandes K_i. Dann ist

$$F(i,i) := \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(i,i)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei gegebenem Ausgangszustand K_i dieser jemals wieder erreicht wird.

Definition 2b erfaßt also den Spezialfall i=k der Definition 2a.

Definition 2c: Ein Zustand K_i heißt persistent (nach ROSENBLATT [125, S.53] "rekurrent"), wenn $F(i,i) = 1$ ist.

Definition 2d: Die mittlere Rekurrenzzeit eines persistenten Zustandes K_i ist gegeben durch

$$\mu_i = \sum_{t=1}^{\infty} t.f^{(t)}(i,i)$$

Definition 2e: Ein persistenter Zustand heißt Nullzustand, wenn $\mu_i = \infty$ ist.

Definition 2f: Ein Zustand heißt transient, wenn $F(i,i) < 1$ ist.

Definition 3: Ein Zustand K_i einer MARKOVschen Kette heißt periodisch mit der Periode ξ, wenn ξ eine ganze Zahl größer 1 ist und K_i nur nach ξ, 2ξ, 3ξ, ... Übergängen auftreten kann.

Hat K_i die Periode $\xi > 1$, dann gilt demnach $p^{(t)}(i,i) = 0$ für alle t, die nicht durch ξ teilbar sind.

Definition 4: Persistente, aperiodische Zustände, die keine Nullzustände sind, heißen ergodisch (ROSENBLATT [125,S.53]: "persistent").

Zur Verdeutlichung der Eigenschaften der definierten Zustandsarten sind im Anhang dieser Arbeit einige numerische Beispiele dargestellt.

Wir wollen nun überlegen, welche Rolle diese zunächst mathematisch formulierten Definitionen für die Markenwahl der Haushalte spielen, bevor wir die Frage nach der Existenz einer stationären Endsituation und gegebenenfalls deren Ermittlung in Angriff nehmen.

(1) Liegt eine reduzible MARKOVsche Kette vor, existiert also eine abgeschlossene Zustandsmenge $C \subset K$ mit $C \neq K$, so gibt es auf dem Markt des Konsumgutes K eine Menge C von Marken, auf deren Kauf sich die Wahlakte des betrachteten Haushalts beschränken, wenn einmal eine Marke $K_i \in C$ gewählt wurde. Eine solche Situation ist für das Markenwahlverhalten einer Konsumeinheit zwar sicher nicht die Regel, es fehlt aber bis jetzt der Nachweis dafür, daß ein solcher Fall so realitätsfern ist, daß sich seine Erörterung erübrigen würde. Man denke nur etwa an einen Haushalt, der nach einer ersten Bedarfsdeckung nur noch eine bestimmte Qualitätsklasse eines Konsumgutes nachfragt, ohne daß seine Wahl auf eine einzige Marke beschränkt wäre. Für eine Einschränkung der Modellanalyse auf irreduzible Ketten, die manche wahrscheinlichkeitstheoretischen Gedankengänge etwas vereinfachen würde, gibt es also vorläufig keine stichhaltige Begründung; sie soll deshalb hier auch nicht durchgeführt werden.

Ein Absorptionszustand entspricht einer Konsumgutmarke, die, einmal vom betrachteten Haushalt gekauft, immer wieder gewählt wird. Diese Situation ist denkbar für eine Marke eines Konsumgutes, die aus irgendwelchen Gründen so vorteilhaft ist bezüglich Preis oder Produktqualität, daß konkurrierende Marken durch einmaligen Kauf dieser Marke

aus dem Begehrskreis dieses Haushalts völlig verdrängt werden.

Da aus einer abgeschlossenen Menge C von Marken eines Konsumgutes keine Übergänge auf andere Marken möglich sind, kann man den Wahlprozeß eines Haushaltes für eine abgeschlossene Menge von Marken betrachten, ohne die anderen nicht mehr in die Wahlüberlegungen einbezogenen Marken zu berücksichtigen. Dieser Feststellung entspricht ein unmittelbar einleuchtendes Theorem aus der Theorie der MARKOVschen Ketten (vgl. z. B. FELLER [38,S.350]): Streicht man bei der Übergangsmatrix einer reduziblen MARKOVschen Kette alle Reihen, die Zuständen außerhalb einer abgeschlossenen Zustandsmenge entsprechen, so stellt die resultierende Matrix wiederum eine stochastische Matrix dar, für die die Beziehungen (V.1.),(V.1'.),(V.1".) und (V.2.) gelten.

(2) Für eine homogene MARKOVsche Kette erster Ordnung gilt der im Anhang dieser Arbeit unter Bezugnahme auf FELLER [38,S.354-355] und PRABHU [117,S.48] bewiesene Satz: Sind nur endlich viele Zustände möglich, hat also die Übergangsmatrix nur eine endliche Anzahl von Reihen, so existieren keine Nullzustände. Da für das zur Diskussion stehende Modell der Markenwahl offensichtlich nicht von der Möglichkeit unendlich vieler wählbarer Marken ausgegangen werden kann, werden Nullzustände aus der Betrachtung ausgeklammert.

Die Unterscheidung zwischen transienten und persistenten Zuständen kann zu einer sauberen, allerdings auch modellbezogenen Definition des Begriffs der Markentreue herangezogen werden, der in der wirtschaftstheoretischen Literatur nicht exakt festgelegt ist. Wir wollen folgendermaßen definieren:

a_1) Eine Verbrauchseinheit heißt einer Gütermarke gegenüber treu, wenn

$$F(i,i) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(i,i) = 1$$

ist, also K_i einem persistenten Zustand entspricht.

a_2) Gilt $F(i,i) < 1$, repräsentiert die Marke K_i also einen transienten Zustand, so liegt keine Markentreue vor.

b) Die Markentreue ist umso größer, je kleiner die mittlere Rekurrenzzeit einer persistenten Marke ist.

Man bemerke, daß eine Verbrauchseinheit nach unserer Definition mehre-

ren Marken treu sein kann. Der extreme Fall des permanenten Kaufes ein und derselben Marke K_i, also einer Absorptionsmarke, den man intuitiv als maximale Markentreue bezeichnen würde, ist gekennzeichnet durch $\mu_i = 1$, die geringstmögliche mittlere Rekurrenzzeit.

(3) Periodische Zustände, also Gütermarken, die vom betrachteten Haushalt nur nach $\xi > 1$ Wahlvorgängen wieder gewählt werden können, sind für das Markenwahlverhalten nicht typisch. Denn es existieren sicherlich keine Haushalte, die ihre Markenwahl auf eine Art von Prinzip systematischer Abwechslung zwischen einzelnen Marken gründen. Einem solchen Prinzip entsprächen aber periodische Zustände, wie bei einem Studium der einschlägigen Theorie (z. B. FELLER [38,S.360-362]) deutlich wird. Wir wollen uns daher auf die Betrachtung aperiodischer Zustände beschränken.

(4) Im Zusammenhang mit unserem Modell der Markenwahl haben wir es also zu tun mit transienten und persistenten Zuständen, die keine Nullzustände sind. Alle Zustände sind aperiodisch. Jeder als persistent erkannte Zustand ist deshalb bei unserem Modell wegen Definition 4 ergodisch.

5.2.4. Einige Sätze über Grenzwerte von Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir gehen aus von einer homogenen MARKOVschen Kette erster Ordnung mit einer Menge $K := \{K_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ von aperiodischen Zuständen, wovon $m_o \leq m$ persistent und damit $m - m_o$ transient seien. Die Menge aller persistenten Zustände sei mit C_o bezeichnet.

Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 1: Für alle $K_k \in K/C_o$ ist

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = 0 \qquad (i \in \{1,\ldots,m\}) \quad ,$$

das heißt, bei beliebigem (also persistentem oder transientem) Ausgangszustand K_i verschwindet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach unendlich vielen Übergängen ein transienter Zustand erreicht wird.

Der Beweis dieses Satzes ist im Anhang dieser Arbeit kurz skizziert unter Berücksichtigung von Gedankengängen von ROSENBLATT [125,S.53 ff.] und FELLER [38,S.278 ff.] sowie BHARUCHA-REID [9,S.88]. Er erfolgt unter Zuhilfenahme unter anderem der Theorie der erzeugenden Funktio-

nen, welcher, wie schon bemerkt wurde, ebenfalls im Anhang ein kleiner Abschnitt gewidmet ist.

Aus Satz 1 folgt direkt, daß bei einer homogenen MARKOVschen Kette mit endlich vielen Zuständen die Menge der persistenten Zustände nicht leer sein kann.

Satz 2: Ist $K_k \in C_o$ ein persistenter (und aperiodischer) Zustand einer homogenen MARKOVschen Kette erster Ordnung, so gilt:

$$\lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,k) = \frac{F(i,k)}{\mu_k} \quad ,$$

das heißt (in umständlicher verbaler Formulierung), bei beliebigem (persistentem oder transientem) Ausgangszustand K_i ist die Wahrscheinlichkeit, nach unendlich vielen Übergängen einen persistenten Zustand K_k zu erreichen, gleich dem Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit dafür, daß vom Zustand K_i aus K_k jemals erreicht wird, und der mittleren Rekurrenzzeit des Zustandes K_k.

Der Beweis dieses Satzes 2 wird im Anhang unter Bezugnahme auf FELLER [38,S.291 und S.306/307] und insbesondere ROSENBLATT [125,S.57-59] durchgeführt. Auf einen bei PARZEN [116,S.218/219] durchgeführten anderen Beweis für diese Behauptung sei verwiesen.

Bezüglich möglicher Werte von $F(i,k)$ und μ_k soll Satz 2 einer kurzen und nicht vollständigen Betrachtung unterzogen werden. Wir halten fest, daß K_k als persistent vorausgesetzt wurde und periodische Zustände aus der Betrachtung ausgenommen wurden. Man erhält:

(1) $1 \leq \mu_k < \infty$, falls eine - unseren Überlegungen stets zugrundeliegende - MARKOVsche Kette mit endlich vielen Zuständen vorliegt. Dies folgt direkt aus Definition 2e in 5.2.3. S. 58 und aus dem in 5.2.3. (S. 60, (2)) formulierten Satz bezüglich der Existenz von Nullzuständen bei MARKOVschen Ketten mit endlich vielen Zuständen.

(2a) $F(i,k) = 0$, falls ein Übergang von K_i nach K_k unmittelbar oder mittelbar unmöglich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die K_i zugeordnete abgeschlossene Zustandsmenge den Zustand K_k nicht enthält. Man erkennt, daß die MARKOVsche Kette in diesem Fall reduzibel sein muß.

(2b) $F(i,k) = 1$, falls ein Übergang von K_i zum persistenten Zustand K_k

sicher ist.

Gehört K_k zu der K_i zugeordneten abgeschlossenen Zustandsmenge und ist neben K_k auch K_i persistent, so ist diese Gleichung erfüllt. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt im Anhang dieser Arbeit unter Berufung auf PARZEN [116,S.214 ff.].

Hat man eine irreduzible Kette mit m Zuständen, so existieren, wie leicht gezeigt werden kann (vgl. den Beweis im Anhang), keine transienten Zustände. Es gilt also $F(i,k) = 1$ für alle $i,k \in \{1,\ldots,m\}$, und, wegen Satz 2,

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = \frac{1}{\mu_k}$$

Daraus folgt, daß in diesem Fall der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$ von i unabhängig ist; das heißt, gleichgültig, welcher Ausgangszustand gegeben ist, die Wahrscheinlichkeit, nach unendlich vielen Übergängen einen bestimmten Zustand zu erreichen, ist stets dieselbe. Der Ausgangszustand ist bei irreduziblen Ketten auf lange Frist also unerheblich.

Für die Matrix $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^{(t)} = \lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t$ ergibt sich daraus, daß bei einer irreduziblen Kette

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(1,k) = \ldots = \lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = \ldots = \lim_{t\to\infty} p^{(t)}(m,k) = \frac{1}{\mu_k}$$

ist $(k \in \{1,\ldots,m\})$, also, daß alle Zeilen dieser Matrix gleich sind, oder, anders ausgedrückt, daß in jeder Spalte dieser Matrix m-mal derselbe Wert steht. Deshalb ist bei einer irreduziblen Kette auch

$$\lim_{t\to\infty} \vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} \cdot \lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t = \left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \ldots, \frac{1}{\mu_m}\right) \quad ;$$

der Vektor der absoluten Grenzwahrscheinlichkeiten hat also eine besonders einfache Form. Zu seiner Ermittlung ist die Kenntnis des Vektors $\vec{a}^{(0)}$ nicht nötig.

Ist K_i transient, so erfolgt wegen Satz 1 mit Sicherheit ein Übergang zu einer Menge C_o persistenter Zustände. Ist diese Zustandsmenge abgeschlossen und minimal, ist also eine Unterteilung von C_o in abgeschlossene echte Teilmengen nicht möglich, dann ist von jedem Zustand $K_{k_1} \in C_o$ jeder Zustand $K_{k_2} \in C_o$ mit Sicherheit erreichbar, sonst wären nicht alle Elemente von C_o persistente Zustände (vgl. hierzu einen

früheren Beweis zum Abschnitt 5.2.3. im Anhang dieser Arbeit). Es ist dann leicht einzusehen, daß unter diesen Bedingungen $F(i,k) = 1$ richtig ist für alle $K_k \in C_o$.

(2c) $0 < F(i,k) < 1$, falls ein Übergang vom Zustand K_i zum persistenten Zustand K_k möglich, aber nicht sicher ist. Dieser Fall ist nur gegeben, wenn K_i transient ist. Wäre nämlich K_i persistent, so würde gelten $F(i,k) = 0$, falls K_k nicht in der K_i zugeordneten abgeschlossenen Zustandsmenge enthalten ist (vgl. 2a), und $F(i,k) = 1$, falls K_k zu der K_i zugeordneten abgeschlossenen Zustandsmenge gehört (vgl. 2b).

Damit $0 < F(i,k) < 1$ richtig ist, müssen gewisse Voraussetzungen bezüglich der Aufteilung der Menge der von K_i aus erreichbaren persistenten Zustände der MARKOVschen Kette in abgeschlossenen Zustandsmengen erfüllt sein, die aber hier nicht diskutiert werden sollen.

Abschließend sei kurz nocheinmal die in 5.2.3. (S.60-61) eingeführte Definition der Markentreue einer Verbrauchseinheit aufgegriffen. Aus den oben formulierten Grenzwertsätzen ergeben sich einige interessante Folgerungen, die bestätigen, daß diese Definition sinnvoll ist. Man kann jetzt sagen: Liegt bei einem Haushalt keine Markentreue gegenüber einer bestimmten Gütermarke vor, so wird diese Marke nach sehr vielen Markenwahlvorgängen nicht mehr gewählt. Ist eine Verbrauchseinheit dagegen einer Marke treu, dann existiert eine positive Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Marke nach sehr vielen Wahlvorgängen immer noch gewählt wird. Je größer die Markentreue des Haushalts ist, umso größer ist die Wahlwahrscheinlichkeit für diese Marke in der stationären Endsituation.

5.2.5. Die algebraische Behandlung MARKOVscher Ketten erster Ordnung mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten

Die Bestimmung der Größen $F(i,k)$ und μ_k, die nach Satz 2 des Abschnitts 5.2.4. (S.62) zur Ermittlung der Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$ für einen persistenten Zustand K_k herangezogen werden können, ist in manchen Fällen ohne Schwierigkeiten durchführbar. Dies zeigte sich bei den im Anhang zur Ergänzung von Abschnitt 5.2.3. entwickelten einfachen numerischen Beispielen MARKOVscher Ketten. Die Übergangsmatrix wies entweder viele Nullen auf oder hatte nur eine kleine Anzahl von Reihen. Zur Bestimmung der Werte $F(i,k)$ und μ_k bedurfte es in diesen Fällen im we-

sentlichen nur der Ermittlung von Grenzwerten geometrischer Reihen.

Man erkennt jedoch leicht, daß die Errechnung solcher Größen für weniger einfach strukturierte MARKOVsche Ketten auf diese Art und Weise unmöglich wird. Auch die Bestimmung der Werte $p^{(t)}(i,k)$ durch t-maliges Potenzieren der Übergangsmatrix ist bei vielreihigen Matrizen sehr mühsam, wenn nicht undurchführbar. Es entsteht damit die Frage, ob Möglichkeiten bestehen, aus einer gegebenen Übergangsmatrix die Größen $p^{(t)}(i,k)$ für beliebige t sowie die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$ auf bequeme Art und Weise zu erhalten.

Ein Studium der Literatur zeigt, daß bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $p^{(t)}(i,k)$ mehrstufiger Übergänge sowie deren Grenzwerte auf verschiedene Weise vorgegangen werden kann. In den Lehrbüchern etwa von FELLER [38,S.380 ff.], ROSENBLATT [125,S.44-52] und TAKACZ [154,S.16-19] werden Verfahren geschildert, die im wesentlichen auf der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren basieren. Dagegen ist bei KEMENY und SNELL [85] auf die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor, allerdings auch auf die Berechnung höherer Potenzen der Übergangsmatrix, verzichtet worden. Eine besonders einfache und elegante, weil die Werte $p^{(t)}(i,k)$ und deren Grenzwerte in einem Arbeitsgang liefernde Art algebraischer Behandlung MARKOVscher Ketten wurde in jüngerer Zeit von HOWARD [77] entwickelt.

Detaillierte vergleichende Erörterungen aller dieser natürlich verwandten Möglichkeiten, ein sicherlich mathematisch sehr reizvolles Vorhaben, können im Hinblick auf die Themenstellung nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Wir beschränken uns daher auf eine kurze Darstellung des HOWARD-Algorithmus und dessen Anwendung bei zwei einfachen konkreten Beispielen im Anhang dieser Arbeit.

5.2.6. Der einzelwirtschaftliche Markenwahlprozeß in der stationären Endsituation

In den letzten Abschnitten wurde nachgewiesen, daß unter den für unser Modell gültigen Bedingungen immer letzten Endes eine Stabilität des Markenwahlprozesses resultiert, wenn man unendlich viele aufeinanderfolgende Markenwahlakte der Verbrauchseinheit unterstellt. Diese stationäre Endsituation ist, wie schon im Abschnitt 5.2.2. (S.55) kurz festgestellt wurde, gekennzeichnet durch einen im Zeitablauf

dann invarianten Vektor

$$\vec{a} = \vec{a} \cdot \mathfrak{M} = \lim_{t \to \infty} \vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} \lim_{t \to \infty} \mathfrak{M}^t$$

absoluter Wahlwahrscheinlichkeiten. Er ist bei irreduziblen MARKOVschen Ketten (vgl. S.63) und auch bei manchen reduziblen Ketten (vgl. Beispiel 1 zu 5.2.3. im Anhang dieser Arbeit) unabhängig, sonst (vgl. Beispiel 2 zu 5.2.3. im Anhang) abhängig vom Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten. Wir wollen diese Endsituation nocheinmal zusammenfassend mit Bezug auf die Markenwahlvorgänge des Haushalts charakterisieren.

Ist die stationäre Endsituation bei einer Verbrauchseinheit realisiert, so ist

(1) für jeden individuellen Markenwahlvorgang unabhängig von der Zeit bzw. der Nummer t dieses Vorgangs - und unter Berücksichtigung unserer restriktiven akzessorischen Modellannahmen, insbesondere 5.1.2.1. (S.50), für die Markenwahlvorgänge aller N Konsumeinheiten -

$$a(k) = \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i) \lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,k) \qquad (V.6.)$$

die Wahrscheinlichkeit der Entscheidung für die Gütermarke K_k;

(2) für eine Aufeinanderfolge von T Wahlvorgängen die Anzahl T_k der Entscheidungen für die Marke K_k erwartungsgemäß

$$E\,T_k = T.a(k) = T. \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i). \lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,k) \qquad (V.7.)$$

Zu bemerken ist, daß hier natürlich, obwohl sich $\vec{a}$ im Zeitablauf nicht ändert, kein verallgemeinertes BERNOULLIsches Schema einer Folge unabhängiger Versuche wie bei der analogen Fragestellung in § 4 dieser Arbeit vorliegt, weswegen auch auf eine Berechnung von var T_k verzichtet werden soll.

5.3. Gesamtwirtschaftliche Analyse der Entwicklung der Marktanteile

Zunächst sei nocheinmal an das im Abschnitt 5.1. entwickelte Hypothesensystem erinnert; wir hatten vorausgesetzt, daß für jeden Haushalt der Volkswirtschaft das Markenwahlverhalten durch eine MARKOVsche Kette erster Ordnung mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten repräsentiert wird, daß die Wahlentscheidungen der einzelnen Haushalte simultan erfolgen und daß bei jedem Kauf genau eine einheitliche

Quantität einer Gütermarke gewählt wird. Außerdem wurde angenommen, daß die Vektoren $\vec{a}_j^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die Matrizen $\mathcal{M}_j$ der Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Verbrauchseinheiten der Volkswirtschaft gleich sind.

Die gesamtwirtschaftliche Analyse des Modells ist bei diesen Voraussetzungen ohne größere Schwierigkeiten zu bewältigen, wenn man sich auf die Ermittlung von Erwartungswerten beschränkt. Man erhält unter Berücksichtigung der Ergebnisse von 5.2.1. und 5.2.6. zunächst folgende Resultate:

(1) Erwartungsgemäß ist die Anzahl N_k der Wahlentscheidungen für die Gütermarke K_k bei N simultan stattfindenden Wahlakten aller Konsumeinheiten

(1a) zum Zeitpunkt t (vgl. S.53):

$$E\,N_k = N.a^{(t)}(k) = N.\sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).p^{(t)}(i,k) \qquad (V.8.)$$

(1b) in der stationären Endsituation (vgl. S.66):

$$E\,N_k = N.a(k) = N.\sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) \qquad (V.9.)$$

(2) Erwartungsgemäß beträgt die Anzahl M_k der Wahlentscheidungen für die Gütermarke K_k bei T aufeinanderfolgenden kollektiven, also $M = N.T$ einzelnen Wahlvorgängen

(2a) zu den Zeitpunkten $\tau+1,\tau+2,\ldots,\tau+t,\ldots,\tau+T$ (vgl. S.54):

$$E\,M_k = N.E\,T_k = N.\sum_{t=1}^{T} a^{(\tau+t)}(k) =$$

$$= N.\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).p^{(\tau+t)}(i,k) \qquad (V.10.)$$

(2b) in der stationären Endsituation (vgl. S.66):

$$E\,M_k = N.E\,T_k = N.T.a(k) =$$

$$= N.T.\sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) \qquad (V.11.)$$

Die hier benötigten Werte $p^{(t)}(i,k)$ und $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)$ sind mittels des HOWARD-Algorithmus, wie im Abschnitt 5.2.5. (S.64-65) und in den dazugehörigen Beispielen im Anhang dieser Arbeit gezeigt wurde, leicht

zu ermitteln.

Verwendet man diese Ergebnisse zur Ermittlung des Erwartungswertes für den Marktanteil $A(k) = \frac{M_k}{M}$ der Marke K_k, so erhält man

(1) für die Periode, die die Wahlakte zu den Zeitpunkten $\tau+1, \tau+2, \ldots, \tau+t, \ldots, \tau+T$ umfaßt,

$$E\, A^{[\tau+1,\,\tau+T]}(k) = \frac{1}{M} \cdot E\, M_k = \frac{N}{M} \cdot E\, T_k = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} a^{(\tau+t)}(k)$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i) \cdot p^{(\tau+t)}(i,k) \qquad (V.12.)$$

(2) für eine Periode von T aufeinanderfolgenden kollektiven Wahlakten in der stationären Endsituation

$$E\, A^{[T]}(k) = \frac{1}{M} \cdot E\, M_k = \frac{N.T}{M}\, a(k) = \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i) \cdot \lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,k)$$

(V.13.)

Der Marktanteil einer Marke in der stationären Endsituation ist also erwartungsgemäß gleich der absoluten Grenz-Wahlwahrscheinlichkeit für diese Marke.

5.4. Zum Problem der Zusammenfassung mehrerer Marken eines Konsumgutes zu Aggregatmarken

Für eine Prognose der Marktanteile konkurrierender Gütermarken auf der Basis des Modells, das Gegenstand dieses Paragraphen ist, bedeutete es eine starke Verfahrensvereinfachung, wenn man einige besonders interessierende Marken zwar einzeln betrachten, die anderen Marken jedoch zu einer oder mehreren Aggregat- oder Nullmarken zusammenfassen könnte. Für einige Märkte, insbesondere solche mit teiloligopolistischer Struktur (vgl. z. B. KRELLE [90,S.503-506]), ist die Definition solcher Aggregatmarken vermutlich sogar unumgänglich, weil eine volle Übersicht über Anbieter mit kleinen Marktanteilen fehlt.

Beim Unabhängigkeitsmodell von § 4 war die Aggregation einzelner Marken zu Markengruppen unproblematisch, weil das verallgemeinerte BERNOULLIsche Schema einer Folge unabhängiger Versuche mit m Ausprägungen ohne weiteres auf speziellere Schemen solcher Art mit weniger Ausprägungen zurückgeführt werden kann (vgl. auch Abschnitt 4.4. S.47-48).

Wir wollen auf der Grundlage des in 5.1. (S.48-51) entwickelten Hypothesensystems untersuchen, ob dies auch für das Modell der Markenwahl als MARKOVscher Kette erster Ordnung mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten gilt.

Wir gehen zunächst davon aus, daß eine MARKOVsche Kette mit der Zustandsmenge $K = \{K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_m\}$, dem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten und der Matrix $\mathfrak{M}$ der Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben ist. Die Zustandsmenge K wird vermöge einer gegebenen Funktion φ auf eine neue Zustandsmenge $K^* = \{K_1^*, \ldots, K_i^*, \ldots, K_{m'}^*\}$ mit $1 \leq m' \leq m$ surjektiv abgebildet. Die Teilmengen $\overset{-1}{\varphi}(K_i^*)$ der Zustandsmenge K enthalten also alle Zustände aus K, die durch φ in den Zustand $K_i^* \in K^*$ übergeführt werden. Gefragt ist, ob für die Zustandsmenge K^* wiederum eine MARKOVsche Kette vorliegt.

Wie Untersuchungen insbesondere von ROSENBLATT [125,S.59-64] gezeigt haben, ist diese Frage nur unter sehr restriktiven Bedingungen, die die numerischen Werte der Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ betreffen, positiv zu beantworten. Um diese Bedingungen angeben zu können, braucht man zunächst einige Definitionen.

Definition 1a: Wir bezeichnen mit $p(i,i^*)$ die Wahrscheinlichkeit des direkten Überganges vom Zustand $K_i \in K$ zur Zustandsmenge $\overset{-1}{\varphi}(K_i^*)$.

Für sie gilt offensichtlich:

$$p(i,i^*) = \sum_{K_k \in \overset{-1}{\varphi}(K_i^*)} p(i,k)$$

Definition 1b: Wir bezeichnen mit $p(i^*,i)$ die Wahrscheinlichkeit des direkten Überganges zum Zustand K_i, wenn man weiß, daß ein Zustand aus $\overset{-1}{\varphi}(K_i^*)$ realisiert ist.

Definition 1c: Wir bezeichnen mit $p(i^*,k^*)$ die Wahrscheinlichkeit des direkten Überganges zur Zustandsmenge $\overset{-1}{\varphi}(K_k^*)$, wenn man weiß, daß ein Zustand aus $\overset{-1}{\varphi}(K_i^*)$ realisiert ist.

Definition 2: Ein Element $K_i^* \in K^*$ heißt aggregierter Zustand (Zustandsgruppe) mit einfachem Zugang, wenn $p(i,i^*) > 0$ nur für Zustände K_i aus höchstens einer Urbildmenge $\overset{-1}{\varphi}(K_k^*)$ richtig ist.

Unter Berücksichtigung dieser Definitionen gilt der folgende Satz, der im Anhang dieser Arbeit unter Bezugnahme auf ROSENBLATT [125,S. 61-62] bewiesen wird:

Satz 1: Existieren keine aggregierten Zustände $K_i^* \in K^*$ mit einfachem Zugang, so hat man für die Zustandsmenge K^* bei beliebigem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten mit $a^{(0)}(i) \neq 0$ für alle i genau dann wiederum eine MARKOVsche Kette, wenn

$$p(i,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \ddot{\varphi}(K_{i_1}^*)} p(k,\nu)p(\nu,i_2^*) = p(k,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \ddot{\varphi}(K_{i_1}^*)} p(i,\nu)p(\nu,i_2^*)$$

für alle K_i, $K_k \in K$ und $K_{i_1}^*, K_{i_2}^* \in K^*$ erfüllt ist.

Wollte man aggregierte Zustände mit einfachem Zugang nicht ausschließen, so ergäben sich zusätzliche Probleme (vgl. ROSENBLATT [125,S. 61]), man erkennt aber unschwer, daß die Voraussetzung von Satz 1, es seien keine aggregierten Zustände mit einfachem Zugang vorhanden, nicht allzu einschneidend ist.

Die Zulässigkeit der Bildung von Markengruppen wird durch die in Satz 1 enthaltene Bedingung stark eingeschränkt. Dies kommt im Anhang dieser Arbeit im Zusammenhang mit einigen numerischen Beispielen nochmals zur Sprache.

Bevor aus diesem negativen Befund Konsequenzen gezogen werden, soll jedoch erst untersucht werden, ob die Situation nicht günstiger ist für den Spezialfall, daß die Bildmenge K^* nur eine Markengruppe (einen aggregierten Zustand), sonst aber Elemente von K enthält.

Es sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K = \{K_1,\ldots,K_{m'-1}, K_{m'},\ldots,K_m\}$ und $K^* = \{K_1,\ldots,K_{m'-1},K_{m'}^*\}$ sowie

$$\varphi : K \to K^* \mid K_i \rightsquigarrow K_i \text{ für } 1 \leq i < m' \; ; \; K_i \rightsquigarrow K_{m'}^* \text{ für } m' \leq i \leq m$$

Dabei bedeutet $K \to K^*$, daß K bzw. K^* Urbildmenge bzw. Bildmenge der Abbildung φ sind, während sich $\rightsquigarrow$ auf einzelne Elemente dieser Mengen bezieht, die vermöge φ einander zugeordnet werden. Unter diesen vereinfachten Bedingungen gilt der folgende Satz (vgl. BURKE und ROSENBLATT [15,S.1113]):

Satz 2: Hat die Abbildung φ die angegebene spezielle Form, so liegt

für die Zustandsmenge K^* bei beliebigem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten genau dann wiederum eine MARKOVsche Kette vor, wenn $(a^{(0)}(i) > 0)$

(1) entweder $\sum_{K_\nu \in \ddot{\varphi}^{-1}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,k) = p(i,m'^*)p(m'^*,k)$

für alle $K_k \notin \ddot{\varphi}^{-1}(K^*_{m'})$ und alle K_i

(2) oder $p(i,m'^*) = 0$

für alle $K_i \notin \ddot{\varphi}^{-1}(K^*_{m'})$

erfüllt ist.

Der Beweis dieses Satzes 2 erfolgt im Anhang mit Bezugnahme auf BURKE und ROSENBLATT [15,S.1116-1117].

Es ist ersichtlich, daß selbst unter den für Satz 2 gültigen vereinfachten Voraussetzungen eine sehr spezielle Bedingung erfüllt sein muß, damit unter Beibehaltung des Grundmodells die Definition auch nur einer einzigen Markengruppe möglich ist. Man vergleiche hierzu auch die numerischen Beispiele zu Satz 2 im Anhang dieser Arbeit.

Für die Prognose von Marktanteilen auf der Basis des in diesem Paragraphen behandelten Modells ergeben sich aus Satz 1 und Satz 2 unbequeme Folgerungen.

Geht man modellgemäß (vgl. Abschnitt 5.1. S.48-51) davon aus, daß der Markenwahlprozeß in einer Volkswirtschaft durch eine MARKOVsche Kette erster Ordnung mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten repräsentiert wird, deren Zustände je genau einer Gütermarke entsprechen, so ist eine Bildung von Markengruppen oder Aggregatmarken unzulässig. Denn man kann nicht erwarten, daß die empirisch vorhandenen und, wie noch zu zeigen sein wird, statistisch zu schätzenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i,k)$ gerade Werte haben, bei denen Satz 1 bzw. Satz 2 für die definierten Markengruppen erfüllt sind. Außerdem wird man sicher, wenn man schon aggregierte Marken einführt, möglichst nur die Übergangsmaße $p(i^*,k^*)$ mit $K^*_i, K^*_k \in K^*$ für Markengruppen statistisch schätzen, ohne Wahrscheinlichkeiten des Überganges zwischen allen einzelnen Gütermarken überhaupt zu berücksichtigen. Damit ist aber eine Nachprüfung, ob die Bedingungen von Satz 1 oder Satz 2 vorliegen,

ausgeschlossen.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, besteht nun offensichtlich darin, daß man das ursprünglich definierte Grundmodell abändert und von vornherein von einer Zustandsmenge ausgeht, die Markengruppen enthält. Man nimmt an, daß sich der Prozeß der Markenwahl zwischen den einzelnen Elementen dieser Zustandsmenge derart vollzieht, daß er durch eine MARKOVsche Kette beschrieben werden kann. Logisch konsequent kann dieses Vorgehen nicht sein. Denn verschiedene Marken, die zu einer Gruppe zusammengefaßt sind, würden in diesem Falle behandelt, als ob sie nur eine einzige homogene Marke bildeten. Es erscheint zwar durchaus möglich, daß auf diese Art und Weise dennoch praktisch befriedigende Ergebnisse gefunden werden können, wenn nur wenige Marken mit insgesamt sehr kleinem Marktanteil gruppiert werden. Grundsätzlich sollte man jedoch aus theoretischen Gründen auf die Bildung von Markengruppen verzichten.

5.5. Möglichkeiten der Variation akzessorischer Annahmen

Die im Abschnitt 5.1. formulierten akzessorischen Modellannahmen 5.1.2.1. bis 5.1.2.4., die diesem Paragraphen bisher zugrundegelegt waren, sind sehr restriktiv. Es muß daher wie beim Unabhängigkeitsmodell des Paragraphen 4 (vgl. Abschnitt 4.3. S.39-47) geprüft werden, ob Schwierigkeiten auftreten, wenn man von diesen Hypothesen abgeht.

5.5.1. Individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten

In Abänderung der Hypothese 5.1.2.1. wird die Annahme fallengelassen, für alle N Haushalte seien die Vektoren $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die Matrizen $\mathfrak{M}$ der Übergangswahrscheinlichkeiten gleich. Jeder Verbrauchseinheit H_j $(j \in \{1,\ldots,N\})$ sei jetzt ein individueller Anfangsvektor $\vec{a}_j^{(0)} = (a_j^{(0)}(1),\ldots,a_j^{(0)}(i),\ldots, a_j^{(0)}(m))$ und eine individuelle Matrix $\mathfrak{M}_j = (p_j(i,k))$ der Übergangswahrscheinlichkeiten zugeordnet. Die Modellannahmen 5.1.1. sowie 5.1.2.2. bis 5.1.2.4. werden dagegen vorerst beibehalten.

Das Wahlverhalten eines einzelnen Haushalts H_j läßt sich dann mittels der Ergebnisse von 5.2.1. (S.52-54) und 5.2.6. (S.65-66) in einfacher Weise charakterisieren.

(1a) Der Vektor $\vec{a}_j^{(t)}$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t beträgt

$$\vec{a}_j^{(t)} = \vec{a}_j^{(0)} . \mathcal{M}_j^t \qquad (V.14.)$$

(1b) Der Vektor $\vec{a}_j$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten in der stationären Endsituation für alle Haushalte ist

$$\vec{a}_j = \vec{a}_j^{(0)} . \lim_{t \to \infty} \mathcal{M}_j^t \qquad (V.15.)$$

(2a) Für den Erwartungswert der Anzahl T_{kj} der Käufe der Marke K_k innerhalb einer Aufeinanderfolge von T Wahlakten zu den Zeitpunkten $\tau+1,\ldots,\tau+t,\ldots,\tau+T$ ergibt sich

$$E\, T_{kj} = \sum_{t=1}^{T} a_j^{(\tau+t)}(k) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} a_j^{(0)}(i) . p_j^{(\tau+t)}(i,k) \qquad (V.16.)$$

(2b) Der Erwartungswert der Anzahl T_{kj} der Käufe einer Marke K_j innerhalb einer Aufeinanderfolge von T Wahlakten in der stationären Endsituation ist

$$E\, T_{kj} = T . \sum_{i=1}^{m} a_j^{(0)}(i) . \lim_{t \to \infty} p_j^{(t)}(i,k) \qquad (V.17.)$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für die Gesamtheit aller N Haushalte der Volkswirtschaft.

(1a) Die Anzahl N_k der Wahlentscheidungen für eine bestimmte Gütermarke K_k beim t-ten kollektiven Wahlvorgang, also bei N gleichzeitig zum Zeitpunkt t erfolgenden individuellen Wahlvorgängen, beträgt erwartungsgemäß

$$E\, N_k = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(t)}(k) = N . \bar{a}^{(t)}(k) \qquad (V.18.)$$

wenn

$$\bar{a}^{(t)}(k) := \frac{\sum_{j=1}^{N} a_j^{(t)}(k)}{N}$$

definiert ist als die durchschnittliche absolute Wahlwahrscheinlichkeit für die Marke K_k.

(1b) Die Anzahl N_k der Wahlentscheidungen für eine bestimmte Gütermarke K_k bei einem kollektiven Wahlvorgang in der stationären Endsituation für alle Haushalte ist erwartungsgemäß

$$E\,N_k = \sum_{j=1}^{N} a_j(k) = N.\bar{a}(k) \qquad (V.19.)$$

(2a) Bei T aufeinanderfolgenden kollektiven Wahlakten zu den Zeitpunkten $\tau+1,\ldots,\tau+t,\ldots,\tau+T$, also bei $M = N.T$ individuellen Wahlvorgängen, ist der Erwartungswert für die Anzahl M_k der Käufe der Marke K_k

$$E\,M_k = \sum_{j=1}^{N} E\,T_{kj} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} a_j^{(\tau+t)}(k) = N.\sum_{t=1}^{T} \bar{a}^{(\tau+t)}(k)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} a_j^{(0)}(i).p_j^{(\tau+t)}(i,k) \qquad (V.20.)$$

(2b) Der Erwartungswert der Anzahl M_k der Käufe der Marke K_k bei T aufeinanderfolgenden kollektiven Wahlakten im stationären Endzustand beträgt

$$E\,M_k = \sum_{j=1}^{N} E\,T_{kj} = T.\sum_{j=1}^{N} a_j(k) = N.T.\bar{a}(k) \qquad (V.21.)$$

Unter den diesem Abschnitt zugrundeliegenden Hypothesen erhält man wegen (V.20.) und (V.21.) für den Erwartungswert des Marktanteils der Marke K_k:

(1) in der Periode, die die Wahlakte zu den Zeitpunkten $\tau+1,\ldots,\tau+t,\ldots,\tau+T$ umfaßt,

$$E\,A^{[\tau+1,\tau+T]}(k) = \frac{1}{M}.E\,M_k = \frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} \bar{a}^{(\tau+t)}(k) \qquad (V.22.)$$

(2) in einer Periode, die T Wahlakte im allgemeinen stationären Endzustand umfaßt,

$$E\,A^{[T]}(k) = \frac{1}{M}.E\,M_k = \bar{a}(k) \qquad (V.23.)$$

Der Erwartungswert der Marktanteile für eine Periode kann also bei Zulassung individueller Anfangs- und Übergangswahrscheinlichkeiten

je Haushalt mittels durchschnittlicher absoluter Wahlwahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. Man erkennt aus (V.22.) und (V.23.) unschwer, daß mit Hilfe von durchschnittlichen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\bar{p}(i,k) := \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j(i,k)}{N}$$

solche Erwartungswerte nicht bestimmt werden können, obwohl ein solches Verfahren für praktisch durchzurechnende Zahlenbeispiele eine sehr große Erleichterung bringen würde.

Durch ein einfaches Zahlenbeispiel im Anhang dieser Arbeit wird diese Behauptung belegt.

Es folgt, daß es dem Modell, das hier zur Debatte steht, bei Zulassung individueller Übergangswahrscheinlichkeiten nicht entsprechen kann, auf irgendwelche Art und Weise (vgl. Kapitel 4 dieser Arbeit) empirisch gefundene individuelle Anfangsvektoren und individuelle Übergangsmatrizen zusammenzufassen. Dies gilt insbesondere für die Definition durchschnittlicher Anfangswahrscheinlichkeiten

$$\bar{a}^{(0)}(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} \bar{a}_j^{(0)}(k)$$

und einer durchschnittlichen Übergangsmatrix

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} M_j$$

Allerdings besteht die Möglichkeit, auch hier wieder, wie im vorhergehenden Abschnitt, das anstehende Problem durch eine zusätzliche Hypothese aus der Welt zu schaffen. Sie würde hier zum Inhalt haben, daß eine einzige empirisch zu ermittelnde Übergangsmatrix das Markenwahlverhalten aller Haushalte beschreibt. Ein solcher Weg ist durchaus gangbar, soweit keine empirischen Befunde vorliegen, die dieser Hypothese widersprechen. Vermutlich wird es auch nicht leicht sein, eine solche Hypothese statistisch zu widerlegen. Sie ist aber von vornherein unplausibel und auch nicht modellgerecht und deshalb nur als Notlösung akzeptabel.

Man muß sich also damit abfinden, daß auch bei diesem lerntheoretischen Modell der Markenwahl wie bei der klassischen Nachfragetheorie

(vgl. S.23 ff.) die Aggregation individueller stochastischer Markenwahlprozesse problematisch ist. Theoretisch ganz einwandfrei zu lösen ist dieses Problem nur, wenn man individuelle Anfangsvektoren $\vec{a}_j^{(0)}$ und Übergangsmatrizen $\mathfrak{M}_j$ ermittelt und die damit gegebenen haushaltsspezifischen MARKOVschen Ketten einzeln durchrechnet. Erst dann, wenn man die individuellen absoluten Wahrscheinlichkeiten $\vec{a}_j$ gefunden hat, ist eine modellgemäße Marktanteilsprognose für eine allgemeine stationäre Endsituation möglich.

Beachtenswert ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß die Gesamtheit der N durch individuelle Anfangswahrscheinlichkeiten und individuelle Übergangsmatrizen gekennzeichneten Markenwahlprozesse, die annahmegemäß simultan stattfinden, durch eine einzige MARKOVsche Kette beschrieben werden kann, wenn man eine akzessorische Annahme berücksichtigt, die im Abschnitt 5.1. nicht ausdrücklich formuliert wurde. Sie legt fest, daß die anfänglichen Wahlvorgange und die Markenübergänge eines Haushalts unabhängig sind von der Markenwahl anderer Haushalte. Es müßte also für die Wahrscheinlichkeiten

$$w_{j,j'}^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T};K_{i'_0},\ldots,K_{i'_T})$$

dafür, daß beim Haushalt H_j die Marken $K_{i_0},\ldots,K_{i_T}$ in der angegebenen Reihenfolge ausgewählt werden und beim Haushalt $H_{j'}$ die Marken $K_{i'_0},\ldots,K_{i'_T}$ in dieser Reihenfolge gekauft werden, gelten $(j,j' \in \{1,\ldots,N\};\ j \neq j')$:

$$\begin{aligned} w_{j,j'}^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T};K_{i'_0},\ldots,K_{i'_T}) &= w_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T}).w_{j'}^{[0,T]}(K_{i'_0},\ldots,K_{i'_T}) \\ &= a_j^{(0)}(i_0).p_j(i_0,i_1).\ \ldots\ .p_j(i_{T-1},i_T). \\ &\quad .a_{j'}^{(0)}(i'_0).p_{j'}(i'_0,i'_1).\ \ldots\ .p_{j'}(i'_{T-1},i'_T) \end{aligned}$$

Dann definiert man als Zustandsmenge dieser MARKOVschen Kette die Menge

$$\mathfrak{K} := \left\{ \bigcap_{j=1}^{N} K_{i_j} \;\middle|\; 1 \leq i_j \leq m \right\}$$

die m^N Zustände umfaßt. Beispielsweise entspricht dem Zustand $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_j} \cap \ldots \cap K_{i_N}$ die Verbrauchssituation, die gekennzeichnet ist durch den Konsum der Marken K_{i_1} beim Haushalt $H_1,\ldots,$ K_{i_j} beim

Haushalt H_j,..., K_{i_N} beim Haushalt H_N. Die m^N Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die m^{2N} Übergangswahrscheinlichkeiten dieser MARKOVschen Kette sind gegeben durch

$$\left\{ \prod_{j=1}^{N} a_j^{(0)}(i_j) \;\middle|\; 1 \leq i_j \leq m \right\}$$

bzw.

$$\left\{ \prod_{j=1}^{N} p_j(i_j,k_j) \;\middle|\; 1 \leq i_j \leq m;\ 1 \leq k_j \leq m \right\}$$

Der Gedanke liegt nahe, die Zustandsmenge dieser MARKOVschen Kette auf eine neue Zustandsmenge $\mathcal{K}^*$ abzubilden, und zwar derart, daß Zustände aus $\mathcal{K}$ zu einer Gruppe zusammengefaßt werden. Zweckmäßigerweise werden alle Zustände aus $\mathcal{K}$ zusammengelegt, die durch eine gleiche Anzahl von Haushalten, die jede der m Marken verbrauchen, gekennzeichnet sind, so daß statt m^N nur noch, wie im Anhang dieser Arbeit bewiesen wird, insgesamt $\binom{N+m-1}{N}$ Elemente einer neuen Zustandsmenge $\mathcal{K}^*$ betrachtet werden. Für $\mathcal{K}^*$ hat man jedoch unglücklicherweise nur unter der sehr restriktiven Bedingung des Satzes 1 von Abschnitt 5.4. (S.70) eine MARKOVsche Kette, weswegen auf diese Art und Weise das Aggregationsproblem für die Markenwahlprozesse der Haushalte einer Volkswirtschaft grundsätzlich nicht gelöst werden kann.

Zur weiteren Erläuterung dieses Gedankenganges wird hierzu im Anhang ein einfaches numerisches Beispiel ausgeführt.

Es bleibt also zunächst nur die Möglichkeit, entweder die individuellen MARKOVschen Ketten einzeln durchzurechnen, was sicherlich sehr aufwendig ist, oder die nicht recht einleuchtende Hypothese zu machen, für das Markenwahlverhalten aller Haushalte sei eine einzige Übergangsmatrix typisch.

Es bietet sich jedoch ein Kompromiß an, der in ähnlichem Zusammenhang bereits bei ANDERSON [2,S.41 und S.64-66] erwähnt ist. Man kann annehmen, daß das Markenwahlverhalten der Haushalte wenn nicht durch eine, so doch durch einige wenige Übergangsmatrizen $\overline{m}_I, \overline{m}_{II}, \ldots, \overline{m}_{(R)}$ genügend genau beschrieben werden kann. Für jede Verbrauchseinheit ist eine dieser R Übergangsmatrizen typisch. Eine solche Typisierung des Verhaltens der Haushalte, also eine Art Schichtung der Grundge-

samtheit aller Haushalte nach Markenwahl-Verhaltensweisen, kann vermutlich auf Grund empirischer Befunde sinnvoll durchgeführt werden. Es müssen dann natürlich Schätzungen für die Schichtumfänge vorliegen.

5.5.2. Individuelle Kaufintervalle

Im Abschnitt 4.3.2. (S.41-43) wurde für das Unabhängigkeitsmodell für jeden Haushalt H_j eine individuell verschiedene Anzahl $T_{\cdot j}$ von einheitlichen Mengen eines Konsumgutes K angenommen, die innerhalb eines Zeitraumes von T Zeiteinheiten ausgewählt werden. Es ist zu untersuchen, auf welche Art und Weise individuelle Kaufintervalle auch für das jetzt zur Diskussion stehende Modell mathematisch bewältigt werden können.

Wir verzichten also auf die Annahme 5.1.2.2., beachten jedoch vorerst - anders als im entsprechenden Abschnitt für das Unabhängigkeitsmodell, bei dem individuelle Wahlwahrscheinlichkeiten vorausgesetzt waren - alle übrigen akzessorischen Annahmen 5.1.2.1., 5.1.2.3. und 5.1.2.4., die sich auf gleiche Anfangsvektoren und Übergangsmatrizen für alle Haushalte, auf standardisierte Kaufquantitäten und auf Invarianz der Übergangsmatrix im Zeitablauf beziehen. Allerdings ist, wie gleich ersichtlich werden wird, eine sinngemäße und nicht wörtliche Formulierung einiger dieser Annahmen erforderlich.

Es wird - wiederum nicht in völliger Analogie zur Behandlung des entsprechenden Problems für das Unabhängigkeitsmodell - außerdem angenommen, die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Übergängen vom Verbrauch einer Marke zum Verbrauch einer anderen Marke sei eine Zufallsvariable. Unter dieser Voraussetzung kann der Prozeß der Markenwahl der Haushalte, wie ein Studium einschlägiger wahrscheinlichkeitstheoretischer Literatur, etwa des Buches von FISZ [47,S.228 ff.], insbesondere aber der Abhandlung von HOWARD [77,S.92 ff.] und der Aufsätze von MORSE, HOWARD sowie KIMBALL und HOWARD [114,S.84-105; S.128-150 und S.153-178] zeigt, durch einen MARKOVschen Prozeß mit kontinuierlicher Zeitachse dargestellt werden.

Wir gehen aus von einer m-reihigen Matrix $\mathfrak{R} = (p_{ik})$, deren Elemente p_{ik} für $i \neq k$ $(i,k \in \{1,\ldots,m\})$ nicht Wahrscheinlichkeiten, sondern Wahrscheinlichkeitsdichten (Raten) des Überganges von einer Konsumgütermarke K_i zu einer anderen Marke K_k sind. Das heißt, die Wahr-

scheinlichkeit, daß in einem kleinen Zeitintervall von der Länge dt ein Übergang zur Marke K_k erfolgt, wenn gegenwärtig eine andere Marke K_i konsumiert wird, beträgt $p_{ik}.dt$. Die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb eines Intervalls der Länge dt zwei oder mehr Übergänge zu anderen Marken erfolgen, ist von der Ordnung $(dt)^2$ oder von höherer Ordnung und wird für genügend kleines dt mit 0 angesetzt. Wir definieren weiter die Elemente p_{kk} in der Diagonalen der Matrix $\mathfrak{R}$ mit

$$p_{kk} = - \sum_{i \neq k} p_{ki}$$

derart, daß für die Zeilensummen von $\mathfrak{R}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} p_{ik} = 0 \qquad (i \in \{1,\ldots,m\})$$

$\mathfrak{R}$ ist also eine Differentialmatrix.

Wir nehmen an, daß die Vektoren $\vec{a}_j^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die Matrizen $\mathfrak{R}$ der Übergangsraten für alle Haushalte gleich sind und haben damit eine vereinfachende Hypothese formuliert, die der Annahme 5.1.2.1. entspricht und die es erlaubt, von einem Anfangsvektor $\vec{a}^{(0)}$ und einer Differentialmatrix $\mathfrak{R}$ der Übergangsraten für alle Haushalte der Volkswirtschaft auszugehen. Statt $\vec{a}^{(0)}$ werden wir aus naheliegenden Gründen in diesem Abschnitt $\vec{a}(0)$ schreiben. Die Hypothese 5.1.2.3. wird vorerst unverändert übernommen. Wir setzen weiter voraus, daß die Matrix $\mathfrak{R}$ der Übergangsraten invariant im Zeitablauf ist und haben damit eine Entsprechung zur Annahme 5.1.2.4.

Mit diesen akzessorischen Annahmen läßt sich der Markenwahlprozeß eines einzelnen - und wegen der 5.1.2.1. entsprechenden Hypothese jedes - Haushaltes der Volkswirtschaft beschreiben (vgl. HOWARD [77,S.93 ff.] und HOWARD und KIMBALL [114,S.166 ff.]).

Es sei $a_k(t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitpunkt t[1)] von einem Haushalt die Marke K_k verbraucht wird. Diese Größe entspricht also der absoluten Wahlwahrscheinlichkeit $a^{(t)}(k)$ für MARKOVsche Ketten mit diskreter Zeitachse. Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten

---

1) t bezeichne jetzt nicht mehr die Nummer einer Periode bzw. eines Wahlvorganges wie bisher in diesem Paragraphen, sondern sei ein Punkt auf der stetigen Zeitachse. t ist also nicht mehr als ganze, sondern als reelle Zahl ≥ 0 definiert.

$a_i(t)$ bzw. $a_k(t+dt)$ dafür, daß zu den Zeitpunkten t bzw. t+dt die Marken K_i bzw. K_k verbraucht werden, folgende rekursive Beziehung:

$$a_k(t+dt) = a_k(t)(1 + p_{kk}dt) + \sum_{i\neq k} a_i(t)p_{ik}dt \qquad (V.24'.)$$

für $k \in \{1,\ldots,m\}$. Denn es bestehen zwei unvereinbare Möglichkeiten für einen Haushalt, den durch die Marke K_k gekennzeichneten Verbrauchszustand zum Zeitpunkt (t+dt) zu erreichen. Entweder wurde K_k schon zum Zeitpunkt t verbraucht und es kam im Intervall (t,t+dt) kein Übergang vor; dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$a_k(t)(1 - \sum_{i\neq k} p_{ki}dt) = a_k(t)(1 + p_{kk}dt)$$

Oder es wurde zum Zeitpunkt t eine Marke $K_i \neq K_k$ konsumiert und es fand ein Übergang von der Marke K_i zur Marke K_k statt; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\sum_{i\neq k} a_i(t)p_{ik}dt$$

Aus (V.24'.) erhält man ($k \in \{1,\ldots,m\}$)

$$a_k(t+dt) - a_k(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)p_{ik}dt$$

$$\frac{a_k(t+dt) - a_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)p_{ik}$$

und, wenn dt gegen 0 strebt,

$$\lim_{dt\to 0} \frac{a_k(t+dt) - a_k(t)}{dt} = \frac{d}{dt} a_k(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)p_{ik}$$

Definiert man $\vec{a}(t) = (a_1(t),\ldots,a_i(t),\ldots,a_m(t))$, so läßt sich diese Beziehung wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \vec{a}(t).\mathcal{R} \qquad (V.24.)$$

Dieses System von m Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten p_{ik} spielt für den hier zur Diskussion stehenden MARKOVschen Prozeß der Markenwahl mit stetiger Zeitachse dieselbe Rolle wie das System

$$\vec{a}(t+1) = \vec{a}(t).\mathcal{R}$$

für eine MARKOVsche Kette mit diskreter Zeitachse (vgl. Abschnitt 5.2.1. S.52-54).

Die algebraische Behandlung MARKOVscher Prozesse dieser Art kann mittels eines modifizierten HOWARD-Algorithmus, dem statt der z-Transformation die sogenannte LAPLACE-Transformation zugrundeliegt, erfolgen. Er wird im Anhang kurz dargestellt und an einem numerischen Beispiel erläutert. Man erhält - ganz analog wie bei MARKOVschen Ketten - absolute Zustandswahrscheinlichkeiten $\vec{a}(t)$ sowie deren Grenzwerte für $t \to \infty$ in einem Rechengang.

Wir wollen uns noch mit der Interpretation der Elemente der Matrix $\mathcal{R} = (p_{ik})$ der Übergangsraten für Markenwahlprozesse befassen. Wird etwa ein Konsumgut in Form von zwei Marken K_1 und K_2 angeboten und nachgefragt und hat man

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

so ist (vgl. HOWARD [77,S.96-97]) damit eine Situation gegeben, die man folgendermaßen charakterisieren kann:

(1) Wird die Marke K_1 (K_2) verbraucht, dann ist eine Wahrscheinlichkeit von 8dt (2dt) dafür vorhanden, daß innerhalb eines kleinen Zeitintervalls von der Länge dt ein Übergang zum Verbrauch der Marke K_2 (K_1) erfolgt.

(2) Diese Aussage entspricht, wie aus den zugehörigen Ausführungen im Anhang wenigstens andeutungsweise hervorgeht (vgl. auch FISZ [47, S.244-245]), der Annahme, daß die Verbrauchsdauer der Marken K_1 (K_2) exponentialverteilt ist mit explizitem Parameter 8 (2), d.h., daß diese Exponentialverteilung den Mittelwert $\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{2}$) aufweist (vgl. zur Exponentialverteilung etwa FISZ [47,S.136-137]; RENYI [119,S.184]). Die Verbrauchsdauer der Marke K_1 (K_2) beträgt also erwartungsgemäß $\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{2}$) Zeiteinheiten.

Die eben entwickelte Hypothese, die Verbrauchsdauer der einzelnen Marken sei eine Zufallsvariable, genügt an sich zunächst nicht, um Aussagen über Marktanteile einzelner Marken für die Zukunft zu machen. Zu berücksichtigen sind neben den Verbrauchsdauern für die

einzelnen Konsumgütermarken, die auf die Differentialmatrix der Übergangsraten zurückgehen, auch die Verbrauchsintensitäten der Haushalte, d.h. die Mengen, die die Haushalte von einem Konsumgut in einer Zeiteinheit verbrauchen. Diese Größe ist vor allem für Güter des Massenkonsums, weniger jedoch für Gebrauchsgüter, von Bedeutung. Sie wäre hier logischerweise ebenfalls als Zufallsvariable anzusetzen. Wir wollen diesen Gedanken, der im nächsten Abschnitt nochmals aufgegriffen wird, hier nicht weiter verfolgen, sondern uns mit der Feststellung begnügen, daß der Einbezug einer solchen Größe in unserem Modell grundsätzlich ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Unter den gegebenen Bedingungen erhält man für die Marktanteile einer Marke K_k eines Konsumgutes K einfache Ergebnisse.

(1) Für das Zeitintervall $(\tau,\tau+T)$ ergibt sich erwartungsgemäß

$$E\, A^{[\tau,\tau+T]}(k) = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} a_k(t)\,dt \qquad (V.25.)$$

als Marktanteil der Marke K_k.

(2) Für ein Intervall der Länge T in der stationären Endsituation erhält man

$$E\, A^{[T]}(k) = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} a_k\,dt = a_k \qquad (V.26.)$$

als Erwartungswert des Marktanteils der Marke K_k, wenn $a_k := \lim_{t\to\infty} a_k(t)$ definiert ist, a_k also die absolute Wahrscheinlichkeit des Verbrauchs der Marke K_k in der stationären Endsituation darstellt.

Dieser einfache Befund, der übrigens durch die Annahme unterschiedlicher Verbrauchsintensitäten bei den Haushalten nicht geändert wird, ist natürlich vor allem der Annahme zuzuschreiben, die Differentialmatrix der Übergangsraten sei für alle Haushalte der Volkswirtschaft gleich. Baut man diese der Annahme 5.1.2.1. entsprechende Hypothese ab, so wird das Modell wesentlich komplizierter. Sie ist jedoch bei weitem plausibler als die entsprechende Annahme für eine MARKOVsche Kette mit diskreter Zeitachse, also die Annahme gleicher stochastischer Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten. Denn es wird keine

Gleichheit der in die Differentialmatrix $\mathfrak{R}$ eingehenden Verbrauchsdauern für alle Haushalte vorausgesetzt, sondern man nimmt an, für diese Größen seien Exponentialverteilungen gegeben.

5.5.3. Individuelle Kaufquantitäten

Bisher wurde gemäß der Annahme 5.1.2.3. vorausgesetzt, daß jede Marke K_i eines Konsumgutes K nur in einer einheitlichen und für alle Marken gleichen Quantität angeboten und nachgefragt wird. Für das Unabhängigkeitsmodell des Paragraphen 4 wurde die 5.1.2.3. entsprechende Annahme 4.1.2.3. im Verlauf des Abschnitts 4.3.3. (S.43 ff.) ersetzt durch die Hypothese, es würden Standard- und Großpackungen jeder Marke gewählt. Es handelte sich dabei nur um ein spezielles Beispiel dafür, wie die Annahme 4.1.2.3. variiert werden kann. Eine allgemeinere Annahme über unterschiedliche Kaufquantitäten wurde für das Unabhängigkeitsmodell nicht formuliert, weil dies angesichts der mangelnden Realitätsnähe der Grundannahme 4.1.1. dieses Modells nicht als lohnend erschien.

Es wird jetzt untersucht, auf welche Weise sich individuelle Kaufquantitäten in das jetzt zur Diskussion stehende Modell einbauen lassen, also, ob ein Abgehen von der restriktiven Annahme 5.1.2.3. grundsätzlich möglich ist.

Die Hypothese 5.1.2.3. werde jetzt ersetzt durch die Annahme, jeder Haushalt kaufe bei jedem Markenwahlakt individuelle Quantitäten des Konsumgutes K, die auch im Zeitablauf innerhalb eines Haushaltes variieren dürfen. Wir nehmen weiter wiederum an, gleichzeitige Wahlentscheidungen für mehr als eine Marke kämen nicht vor. Es würden also zwar interindividuell und im Zeitablauf variierende Kaufmengen zugelassen, nicht aber der simultane Verbrauch mehrerer Marken eines Konsumgutes innerhalb eines Haushaltes. Diese Annahme ist, wie früher schon erwähnt wurde, plausibel und sicherlich durch empirische Untersuchungen als realistisch nachweisbar.

Wir überlegen jetzt, ob es sinnvoll ist, unter dieser neuen Voraussetzung in analoger Weise wie im vorhergehenden Abschnitt die anderen akzessorischen Annahmen 5.1.2.1., 5.1.2.2. und 5.1.2.4. beizubehalten. Es wäre damit vorausgesetzt, die Vektoren $\vec{a}_j^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten sowie die Matrizen $\mathfrak{M}_j$ der Übergangswahrscheinlich-

keiten seien für alle Haushalte gleich (5.1.2.1.) und die $\mathfrak{M}_j$ im Zeitablauf invariant (5.1.2.4.); außerdem, daß zwar individuell verschiedene Markenquantitäten im Zuge der Markenwahlakte der Haushalte gewählt werden, die Kaufintervalle für alle Haushalte jedoch gemäß Annahme 5.1.2.2. gleich bleiben und die Wahlvorgänge simultan erfolgen.

Eine solche Kombination von akzessorischen Annahmen ist nicht sinnvoll, weil die beiden zuletzt genannten Hypothesen unverträglich erscheinen. Man darf nicht annehmen, daß sich der intensivere Verbrauch eines Konsumgutes K bei einem Haushalt H_j nur in einer größeren Kaufquantität bei jedem Wahlvorgang äußert, nicht jedoch in einer dichteren zeitlichen Aufeinanderfolge einzelner Wahlakte. Es folgt daraus, daß individuelle Kaufquantitäten nur zusammen mit individuellen Kaufintervallen zugelassen werden können.

Damit rückt das im vorigen Abschnitt 5.5.2. besprochene Modell, das auf einem MARKOVschen Prozeß mit kontinuierlicher Zeitachse basiert, erneut in den Vordergrund.

Tatsächlich sind diesem Modell keine Annahmen über die Länge der Kaufintervalle oder die Kaufquantitäten zugrundegelegt. In die Matrizen $\mathfrak{R}$ der Übergangsraten gehen nur die als exponentialverteilt angenommenen Verbrauchsdauern der einzelnen Marken ein. Das heißt, hier spielt keine Rolle, auf welche technische Art und Weise zu Beginn oder im Verlauf der Verbrauchsdauer einer Marke K_i diese Marke beschafft wird. Beispielsweise ist es gleichgültig, ob

(1) entweder mehrere Quantitäten dieser Marke zu Beginn der Verbrauchsdauer für diese Marke gekauft und anschließend konsumiert werden,

(2) oder eine Quantität dieser Marke gekauft und verbraucht wird und anschließend weitere Wahlvorgänge zugunsten dieser Marke erfolgen.

Wird in irgendwelcher Art und Weise die Verbrauchsintensität der Haushalte (vgl. S.81-82) berücksichtigt, so ist man demgemäß grundsätzlich in der Lage, durch ein MARKOV-Modell mit stetiger Zeitachse die Schwierigkeiten auszuräumen, die durch den Verzicht auf die restriktiven akzessorischen Annahmen 5.1.2.2. wie auch 5.1.2.3. ent-

stehen. Es genügt daher, hier auf das im vorhergehenden Abschnitt 5.5.2. dargestellte Modell zu verweisen.

5.5.4. Im Zeitablauf variierende Übergangswahrscheinlichkeiten

Schon im Abschnitt 4.3.4. (S.46 ff.) wurde der Gedanke entwickelt, die Wahlwahrscheinlichkeiten, die dem Unabhängigkeitsmodell zugrundeliegen, als Funktionen der Haushaltseinkommen oder deren Änderungen oder der Markenpreise und deren Änderungen aufzufassen, wodurch eine Verbindung zwischen der Nachfragetheorie im üblichen Sinne und den in dieser Arbeit dargestellten Ansätzen zustandekommt. Folgerichtig ist, dementsprechend jetzt Übergangswahrscheinlichkeiten oder Übergangsraten als Funktionen dieser Größe zu definieren.

Das Problem, welche und wieviele erklärende Variablen zu berücksichtigen sind, wurde schon früher (Abschnitt 2.1. S.15 ff.) als generell nicht lösbar nachgewiesen. Preis- und Einkommensgrößen verdienen zwar bevorzugte Berücksichtigung, hinzu kommen jedoch unter anderem Werbung, Absatzmethoden, Produktgestaltung und andere unternehmenspolitische Instrumente des Absatzbereiches. Aus der Vielfalt dieser Variablen werden hier nur einige Preise, nämlich die m Preise der m konkurrierenden Marken, herausgegriffen. Vorab sei gesagt, daß andere erklärende Variablen selbstverständlich formal in derselben Art und Weise zu behandeln sind.

Zur weiteren Vereinfachung der Gedankengänge behalten wir in diesem Abschnitt die akzessorischen Annahmen 5.1.2.1. bis 5.1.2.3. bei und haben zum ersten Mal die Möglichkeit, bei der Analyse des Modells auf eine ökonometrisch ausgerichtete Arbeit, nämlich auf diejenige von TELSER [155] zurückzugreifen.

Wir nehmen also an, daß eine für alle Haushalte zutreffende Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ vorliegt, die jedoch im Zeitablauf variiert, wenn Markenpreise geändert werden. Ein Element $p^{[t+1]}(i,k)$ der Übergangsmatrix $\mathfrak{M}^{[t+1]}$ sei also als Funktion Ψ_{ik} des Vektors $\vec{q}^{[t]} = (q_1^{[t]}, \ldots, q_i^{[t]}, \ldots, q_m^{[t]})$ der Markenpreise in der Periode t definiert; wir schreiben

$$p^{[t+1]}(i,k) = \Psi_{ik}(\vec{q}^{[t]})$$

und haben damit m^2 im Zeitablauf invariante Funktionen ψ_{ik} angenommen, die die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten von den Markenpreisen ausdrücken. Die Reaktion der Übergangswahrscheinlichkeiten auf Preisänderungen erfolgt, wie aus dieser definitorischen Gleichung hervorgeht, mit einer Verzögerung von einer Zeiteinheit.

Für den Vektor $\vec{a}^{(t+1)}$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten gilt, wie früher schon festgestellt wurde, die Beziehung

$$\vec{a}^{(t+1)} = \vec{a}^{(t)} \mathcal{M}^{[t+1]}$$

und daraus ergibt sich für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$

$$a^{(t+1)}(k) = \sum_{i=1}^{m} a^{(t)}(i) . \psi_{ik}(\vec{q}^{[t]})$$

(vgl. TELSER [155,S.306]).

Wir machen die - allerdings mit der Wirtschaftstheorie, wie später noch erläutert wird, nicht ganz kongruente - Annahme, die Markenpreise würden unabhängig voneinander geändert; der in der Periode t geänderte Markenpreis sei der Preis der Marke K_1. Partielle Ableitung obiger Gleichung nach $q_1^{[t]}$ ergibt:

$$\frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_1^{[t]}} = \sum_{i=1}^{m} a^{(t)}(i) . \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial q_1^{[t]}} \qquad (V.27.)$$

Für k = 1 erhält man

$$\frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_k^{[t]}} = \sum_{i=1}^{m} a^{(t)}(i) . \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial q_k^{[t]}}$$

wobei sicher

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial q_k^{[t]}} < 0$$

ist, denn durch eine Erhöhung von $q_k^{[t]}$ werden die Wahrscheinlichkeiten ψ_{ik} $(i \in \{1,\ldots,m\})$ des Überganges zur Marke K_k sicher verringert. Damit wird auch

$$\frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_k^{[t]}} < 0$$

Wegen $\sum_{k=1}^{m} a^{(t+1)}(k) = 1$ ist

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_k^{[t]}} = 0$$

(vgl. TELSER [155,S.306]), und es folgt

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{\partial a^{(t+1)}(i)}{\partial q_i^{[t]}} = - \frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_k^{[t]}} > 0$$

Der Gesamt-Marktanteil

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} a^{(t+1)}(i) = 1 - a^{(t+1)}(k)$$

aller Marken außer K_k in der Periode t+1 steigt (fällt) also mit dem Preis der Marke K_k in der Periode t. Allerdings ist von vornherein nicht nachweisbar, daß die Marktanteile $a^{(t+1)}(l)$ aller Marken $K_l \neq K_k$ mit dem Preis der Marke K_k in der Periode t steigen (fallen). Es ist durchaus denkbar, daß Marken $K_l \neq K_k$ existieren, deren Marktanteile $a^{(t+1)}(l)$ fallen (steigen), obwohl der Preis der Marke K_k steigt (fällt); sicher gibt es aber mindestens eine Marke $K_l \neq K_k$, die auf Preisänderungen der Marke K_k "direkt", d.h. mit gleichem Vorzeichen, reagiert.

Wir bezeichnen nun (vgl. TELSER [155,S.307]) die Marktanteilsänderungen auf Grund einer Preisänderung einer Marke K_l, die durch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial a^{(t+1)}(k)}{\partial q_l^{[t]}}$$

zum Ausdruck gebracht werden, als unmittelbare oder kurzfristige Reaktion der Marktanteile auf diese Preisänderung.

Daneben kann eine langfristige Reaktion von Marktanteilen auf die Änderung eines Markenpreises q_1 definiert werden. Wir gehen davon aus, daß der Vektor der Markenpreise eines bestimmten Gutes K so lange konstant war, daß sich der stationäre Endzustand einstellte.

Erfolgt nun eine Preisänderung für eine Gütermarke K_1 in einer Periode t, so werden dadurch die Übergangswahrscheinlichkeiten p(i,k) geändert nach Maßgabe der Funktionen ψ_{ik}. Mittels der neuen Übergangsmatrix lassen sich die neuen absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten für die stationäre Endsituation berechnen. Die Veränderung dieser absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten gegenüber denen der Ausgangssituation, die ebenfalls als stationär angenommen wurde, wird als langfristige Reaktion der Marktanteile auf die Preisänderung der Marke K_1 in der Periode t bezeichnet.

Für die formale Durchrechnung dieser langfristigen Reaktion der Marktanteile auf Preisänderungen sei auf TELSER [155,S.307-309] verwiesen. Wir begnügen uns mit der Feststellung, daß langfristige und kurzfristige Reaktionen der Marktanteile auf Grund von Markenpreisänderungen bei Kenntnis der Reaktionsfunktionen ψ_{ik} explizit berücksichtigt werden können. Daß dies auch gilt, wenn man die Markenwahlprozesse der Haushalte durch einen MARKOVschen Prozeß mit stetiger Zeitachse zum Ausdruck bringt, liegt auf der Hand.

5.6. Kleine Modellkritik

Faßt man die Markenwahl der Haushalte einer Volkswirtschaft als MARKOVschen Prozeß erster Ordnung mit diskreter oder stetiger Zeitachse auf, so ist eine kurzfristige und langfristige Marktanteilsprognose möglich. Realistische akzessorische Annahmen verursachen zwar gewisse Komplikationen, sind aber, vor allem durch Annahme einer stetigen Zeitachse, formal zu bewältigen. Die für empirische Untersuchungen wünschenswerte Aggregation einzelner Marken zu einer oder mehreren Aggregatmarken ist allerdings im Gegensatz zum Unabhängigkeitsmodell des Paragraphen 4 nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen ohne Veränderung des Grundmodells möglich.

Im Zeitverlauf weitgehend invariante Marktanteile, die oft zu beobachten sind, finden die recht plausible Erklärung, daß die stationäre Endsituation der Markenwahlprozesse der Haushalte praktisch erreicht

ist und stehen keineswegs im Widerspruch zu der lerntheoretischen Grundlegung des Modells.

Die Grundhypothese 5.1.1., die besagt, daß Markenwahlvorgänge stochastisch abhängig nur vom Ergebnis der zeitlich direkt vorausgehenden Markenwahlakte des Haushalts seien, enthält, negativ formuliert, die Annahme, daß die Verbrauchserfahrung der Haushalte nur zum Teil berücksichtigt wird, und ist deshalb zunächst nicht ganz befriedigend. Der Gedanke, eine MARKOVsche Kette höherer als erster Ordnung zur Beschreibung und Prognose von Markenwahlvorgängen heranzuziehen, liegt nahe.

Betrachtete man die Markenwahlprozesse der Haushalte etwa als MARKOVsche Kette zweiter Ordnung, so wäre folgende zu 4.1.1. (MARKOVsche Kette nullter Ordnung) und 5.1.1. (MARKOVsche Kette erster Ordnung) alternative Haupthypothese zu formulieren: Die Wahrscheinlichkeit $w_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T})$ dafür, daß die Ausgangssituation der Verbrauchseinheit H_j durch den Konsum der Marken K_{i_0} bzw. K_{i_1} gekennzeichnet ist und die Marken $K_{i_2},\ldots,K_{i_T}$ in einer Aufeinanderfolge von T Wahlakten in der angegebenen Reihenfolge ausgewählt werden (T=2,3,...), erfülle die rekursive Beziehung (vgl. z.B. TAKACZ [154,S.1-2])

$$w_j^{[0,T]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_T}) = w_j^{[T]}(K_{i_T}/K_{i_{T-1}};K_{i_{T-2}}).w_j^{[0,T-1]}(K_{i_0},\ldots,K_{i_{T-1}})$$

Man benötigte zur Durchrechnung eines solchen Modells statt m Wahlwahrscheinlichkeiten (MARKOVsche Kette nullter Ordnung) bzw. m^2 Übergangswahrscheinlichkeiten (MARKOVsche Kette erster Ordnung) m^3 zweifach bedingte Übergangswahrscheinlichkeiten und befände sich aus zwei Gründen in einer ziemlich aussichtslosen Situation:

(1) Die formale Behandlung MARKOVscher Ketten höherer als erster Ordnung ist im einzelnen recht kompliziert, wenn auch grundsätzlich auf die Theorie einfacher MARKOVscher Ketten zurückführbar, und wird auch in Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik fast immer umgangen (vgl. allerdings ANDERSON [2,S.54 ff.]). Wollte man bei dieser Grundhypothese auch noch nicht allzu restriktive akzessorische Annahmen zulassen, würde die Analyse solcher Modelle weiter erschwert.

(2) Die bisher noch nicht angeschnittene Frage der statistischen

Schätzung von Wahlwahrscheinlichkeiten oder Übergangswahrscheinlichkeiten durch subjektive Einschätzung oder auf Grund empirischer Befunde (vgl. Kapitel 5, § 9) würde ebenfalls fast unlösbar; ist doch, wie noch zu zeigen sein wird, schon die Schätzung von m^2 einfach bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten nicht unproblematisch.

Man ist zunächst geneigt, diese Einschränkung der Möglichkeiten lerntheoretischer Grundlegung der Markenwahlprozesse als unbefriedigend zu empfinden. Es darf aber nicht vergessen werden, daß die Beeinflussung der Markenwahlvorgänge der Haushalte durch zeitlich weiter zurückliegende Wahlakte ungleich geringer ist als durch aktuelle Verbrauchserfahrungen. Mit einfach bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten wird also immerhin die weitaus wesentlichste lerntheoretische Bestimmungsgröße für Wahlentscheidungen der Haushalte erfaßt.

KAPITEL 3: LERNTHEORETISCH FUNDIERTE ENTSCHEIDUNGSMODELLE ZUR ABSATZPOLITIK VON UNTERNEHMUNGEN

§ 6 Grundlegung

Die Frage, inwieweit lerntheoretische Modelle zur Markenwahl der Haushalte bei unternehmenspolitischen Entscheidungen von Markenartikelherstellern verwendet werden können, ist Gegenstand dieses dritten Kapitels. Beabsichtigt ist dabei in erster Linie eine exakte theoretische Formulierung von möglichst einfachen Optimierungsmodellen, ohne daß zunächst deren praktische Anwendbarkeit, die sicherlich vorsichtig beurteilt werden muß, zur Debatte stünde.

Zu untersuchen ist also, wie absatzpolitische Instrumente der Unternehmer, die Markenartikel herstellen, optimal einzusetzen sind, wenn man deren Wirkung lerntheoretisch, also als Veränderung der Übergangsmatrizen für die individuellen Markenwahlvorgänge, auffaßt; oder, etwas einfacher und konkreter, ob eine geplante spezielle Maßnahme für die Unternehmung lohnend ist. Aus der Vielfalt möglicher absatzpolitischer Maßnahmen werden hier nur die beiden wesentlichsten, nämlich die Preisvariation und die Werbung, behandelt.

Das Grundproblem eines solchen Vorhabens liegt, das sei von vornherein festgestellt, in den begrenzten Möglichkeiten der Unternehmung, die Reaktion der Übergangswahrscheinlichkeiten oder Übergangsraten auf Preisvariationen oder Werbekampagnen objektiv zu schätzen oder subjektiv zu bewerten.

6.1. Modellannahmen

Zusätzlich zu Hypothesen über die Markenwahlprozesse in den Haushalten einer Volkswirtschaft benötigt man für solche Entscheidungsmodelle Annahmen über die Zielsetzung der Unternehmung sowie über deren Kostensituation. Zur Vereinfachung der Gedankengänge wird hier von möglichst einfachen Voraussetzungen ausgegangen.

6.1.1. Die Unternehmung

6.1.1.1. Wir machen die Annahme, daß die in Frage stehende Unternehmung, die eine Marke eines Konsumgutes K herstellt und vertreibt, die Maximierung des Umsatzgewinnes als ausschließliches Ziel verfolgt.

Dies ist zwar nicht im Einklang mit einigen neueren und noch nicht unumstrittenen Tendenzen innerhalb der Betriebswirtschaftslehre, den Grad der Zielverwirklichung einer Unternehmung durch mehrere, teils komplementäre, teils konkurrierende oder indifferente und nur teilweise metrisierbare Größen auszudrücken (vgl. z.B. HEINEN [65, S.16-28]; [67, insbesondere S.59 ff.]; aber auch GUTENBERG [57, S.8 ff.]), sei jedoch hier zur Vereinfachung vorausgesetzt.

Gewinne, die in verschiedenen Perioden anfallen, werden durch Diskontierung auf einen festen Zeitpunkt vergleichbar gemacht. Der hierbei anzusetzende Zinssatz sei im Zeitablauf konstant.

6.1.1.2. Die Stückkosten (gegebenenfalls ohne Werbungskosten), also die Kosten je Mengeneinheit des zur Diskussion stehenden Markenartikels seien unabhängig vom Beschäftigungsgrad; d.h., es liege eine der LEONTIEF-Produktionsfunktion entsprechende Kostensituation vor; die Gesamtkostenkurve sei also eine Ursprungsgerade.

Diese Annahme entspricht nicht ganz der neueren Produktions- und Kostentheorie. In den bekannteren Lehrbüchern zu diesem Bereich (etwa GUTENBERG [56,S.326 ff.]; HEINEN [66,S.406 ff.]; KRELLE [90,S.71 ff.]; RICHTER [121,S.63 ff.]; SAUERMANN [129,S.121 ff.]) werden meist geschwungene und lineare Gesamtkostenverläufe als gleichwertige Alternativen behandelt; eine Tendenz, linearen Gesamtkostenverläufen den Vorzug zu geben, ist aber insbesondere bei GUTENBERG und JOHNSTON [81] unverkennbar. Die lineare Gesamtkostenkurve wird allerdings als Gerade angesetzt, die nicht durch den Ursprung geht, was degressive Stückkosten zur Folge hat. Wir nehmen trotzdem konstante Stückkosten an. Die darzustellenden Modelle können ohne Schwierigkeiten durch Einführung der Begriffe fixe und variable Kosten dementsprechend korrigiert werden.

6.1.2. Der Markenwahlprozeß der Haushalte

Wir wollen in diesem Paragraphen auf eine Diskussion des Unabhängigkeitsmodells verzichten und den Markenwahlprozeß der Haushalte gleich als MARKOVsche Kette erster Ordnung oder alternativ als MARKOVschen Prozeß erster Ordnung mit stetiger Zeitachse auffassen. Die Grundhypothese 5.1.1. (S.48-50) sei also gültig. Zur Vereinfachung wollen wir außerdem nur zwei in bezug auf akzessorische Annahmen besonders einfache Varianten lerntheoretischer Modelle zur Gütermarkenwahl diskutieren:

(1) Es liege entweder eine einzige MARKOVsche Kette mit diskreter Zeitachse vor, derart, daß die akzessorischen Annahmen 5.1.2.1. bis 5.1.2.3. zutreffen, die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten jedoch in Abänderung von Annahme 5.1.2.4. nicht konstant bleibt, sondern auf Grund absatzpolitischer Entscheidungen beteiligter Unternehmen variiert.

(2) Oder die Markenwahlprozesse für ein bestimmtes Wirtschaftsgut in der gesamten Volkswirtschaft seien zu beschreiben durch einen für alle Haushalte gültigen MARKOVschen Prozeß mit stetiger Zeitachse, also durch eine Matrix der Übergangsraten, die durch unternehmenspolitische Maßnahmen der Markenanbieter beeinflußt werden kann.

6.2. Übergangsmatrix und Markenpreise

Schon im Abschnitt 5.5.4. wurde diskutiert, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten einer MARKOVschen Kette mit diskreter Zeitachse, die die Markenwahlvorgänge innerhalb einer Volkswirtschaft zum Ausdruck bringt, reagieren, wenn ein Markenpreis geändert wird. Es wurde festgestellt (S.87), daß die Wahrscheinlichkeiten $p(i,k)$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$ des Überganges zur Marke K_k, deren Preis sich ändert, auf diese Preisänderung indirekt, also in umgekehrter Richtung, reagieren. Es kann weiter vermutet werden, daß sich die Wahrscheinlichkeiten $p(k,i)$ mit $i \neq k$ des Überganges von K_k zu einer anderen Marke vergrößern, wenn q_k steigt, also auf eine Preisänderung der Marke K_k direkt reagieren. Damit kennen wir aber erst das Vorzeichen der Elastizitäten einiger Übergangswahrscheinlichkeiten in bezug auf eine Variation von q_k, nämlich der Übergangswahrscheinlichkeiten, die in der k-ten Zeile und der k-ten Spalte der Übergangsmatrix stehen. Über die Reak-

tion der Übergangswahrscheinlichkeiten für zwei von K_k verschiedene Marken ist dagegen noch gar nichts bekannt.

Soweit hierüber keine empirischen Befunde, also etwa Regressionsanalysen, vorliegen, müssen vernünftige Hypothesen gemacht werden. Zwar wurde im Abschnitt 5.5.4. (S.87) bereits dargelegt, daß es durchaus möglich ist, daß Marken $K_l \neq K_k$ existieren, deren Marktanteile fallen, obwohl q_k steigt; es liegt aber sehr nahe, anzunehmen, daß sich eine Veränderung einer Übergangswahrscheinlichkeit $p(i,k)$ auf $p'(i,k)$ infolge einer Änderung von q_k auf die Wahrscheinlichkeiten $p(i,l)$ mit $k \neq l$ relativ zu den Werten $p(i,l)$ gleich auswirkt. Diese Annahme liefert folgende Beziehung zwischen $p'(i,l)$ und $p(i,l)$:

$$p'(i,l) = p(i,l) + \frac{(p(i,k) - p'(i,k)).p(i,l)}{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} p(i,l)}$$

$$= p(i,l) + \frac{(p(i,k) - p'(i,k)).p(i,l)}{1 - p(i,k)}$$

$$= p(i,l).\frac{1 - p'(i,k)}{1 - p(i,k)} \qquad \text{(VI.1.)}$$

Ein einfaches numerisches Beispiel mag diesen Gedankengang verdeutlichen. Für ein Wirtschaftsgut, das in drei Marken angeboten wird, sei zunächst die Übergangsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$$

gegeben. Eine Erhöhung des Preises q_1 ergebe für die erste Spalte der Übergangsmatrix die Werte $p'(1,1) = 0,3$; $p'(2,1) = 0,2$; $p'(3,1) = 0,15$. Mittels der formulierten Hypothese über die Reaktion der anderen Elemente der Übergangsmatrix erhielte man unter Verwendung von (VI.1.) folgende revidierte Übergangsmatrix:

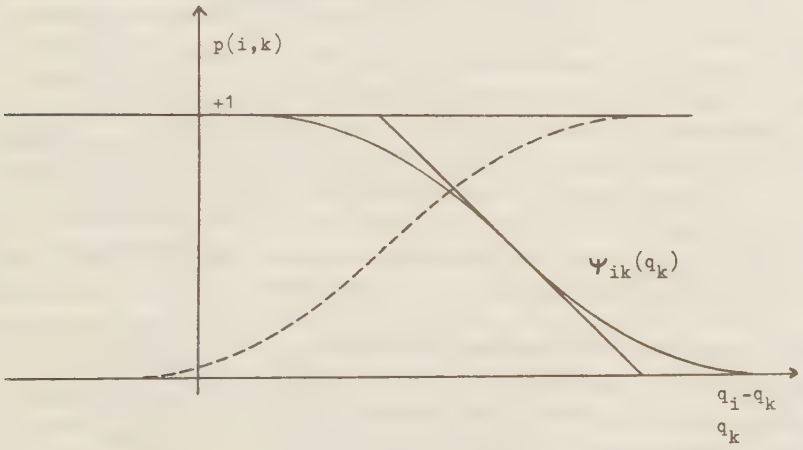
$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,28 & 0,42 \\ 0,2 & 0,46 & 0,34 \\ 0,15 & 0,64 & 0,21 \end{bmatrix}$$

Akzeptiert man eine solche Annahme, so bedarf es, wenn der Preis ei-

ner Marke K_k geändert wird, nur der Kenntnis von m Funktionen $\Psi_{ik}(q_k)$, damit die neue Übergangsmatrix bestimmt werden kann.

Zu diskutieren ist also vor allem die Form der funktionalen Abhängigkeit zwischen dem Preis q_k einer Gütermarke K_k und den Wahrscheinlichkeiten p(i,k) mit $i \in \{1,\ldots,m\}$ des Überganges zu dieser Marke.

Bei TELSER [155,S.303] wird angenommen, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten p(i,k) von der Differenz $q_i - q_k$ der Preise der Marken K_i, K_k in einer - allerdings nicht durch eine Funktionsgleichung konkretisierten - Form abhängig sind, wie sie Figur 1 zeigt ($i \neq k$):



Figur 1: Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten p(i,k) von Markenpreisdifferenzen und Markenpreisen

Es wird vorausgesetzt, daß die anderen Preise konstant bleiben. Je größer $q_i - q_k$ ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit des Überganges zur Marke K_k (gestrichelte Kurve). Nimmt speziell q_k zu und bleibt q_i konstant, so wird $q_i - q_k$ kleiner und p(i,k) geht zurück. Auch für $q_i = q_k$ existiert natürlich eine positive Wahrscheinlichkeit des Überganges von K_i nach K_k. Ist die Neigung der dargestellten Kurve groß, so kann gefolgert werden, daß die Haushalte auf Preisvariationen empfindlich reagieren, das heißt, daß der Wettbewerb stark ist und keine großen Qualitätspräferenzen gegeben sind (vgl. TELSER [155,S.304]).

Sind alle Preise q_l mit $l \neq k$ konstant, ist also insbesondere auch q_i konstant, dann würde aufgrund der von TELSER angegebenen Kurvenform die Funktion $\psi_{ik}(q_k)$ eine Gestalt aufweisen wie die in Figur 1 eingezeichnete, von links nach rechts fallende Kurve. Sie entsteht aus der Ausgangskurve, indem man diese an der Ordinate spiegelt und um q_i nach rechts verschiebt.

Für den bisher ausgeklammerten Spezialfall $i \neq k$ kann von einer Kurve $\psi_{kk}(q_k)$ ausgegangen werden, die eine im Prinzip gleiche Form aufweist.

Natürlich besteht die Möglichkeit, die Kurven $\psi_{ik}(q_k)$ im interessierenden Bereich näherungsweise als Geraden mit negativer Steigung festzulegen. Dadurch entstünden insgesamt ungefähr z-förmige Kurven (vgl. Figur 1), deren Parameter geschätzt werden können. Allerdings ergeben sich dabei gewisse Schwierigkeiten, die von TELSER [155,S.310-311] für einen Spezialfall gelöst wurden. Sie werden noch wesentlich vergrößert, wenn man auf eine Aggregation von Gütermarken, wie sie TELSER [155, S.310] vornimmt, aus bereits dargelegten Gründen (vgl. Abschnitt 5.4. S.68 ff.) verzichtet und deshalb nicht den besonders einfachen Fall einer zweireihigen Übergangsmatrix vorliegen hat.

Obwohl hier sicherlich trotz der TELSERschen Arbeit noch nicht alles geklärt ist, wird dennoch in Zukunft von bekannten Funktionen $\psi_{ik}(q_k)$, also von bekannten Abhängigkeiten zwischen Übergangswahrscheinlichkeiten und entsprechenden Markenpreisen, ausgegangen.

6.3. Übergangsmatrix und Werbemaßnahmen

Die Rolle der Werbung in der Unternehmenspolitik und ihre Wirkung auf die Umsätze der Unternehmung ist auf verschiedenen Ebenen intensiv diskutiert worden (vgl. etwa auch die Zusammenstellung einiger Ansätze bei KORNDÖRFER [89]). Man kann im wesentlichen folgende Richtungen unterscheiden:

(1) Die Angabe praxisorientierter und praktisch verwendbarer Regeln zum wirksamen Einsatz werblicher Mittel ohne intensive theoretische Fundierung (z.B. die deskriptive Abhandlung von BORDEN [12] oder die Aufsätze von LOCKLEY [97] und VAILE [165]).

(2) Die Vielzahl speziell psychologisch orientierter Untersuchungen

zur Werbewirkung, die allerdings meist die hier interessierende Reaktion des Umsatzes oder Absatzes auf eine Werbemaßnahme gar nicht zum Gegenstand haben, sondern sich auf die psychologische Wirkung von Werbemaßnahmen beim angesprochenen Konsumenten beziehen (vgl. neben vielen Aufsätzen zu Teilaspekten dieses Problems die beiden Monographien von LUCAS und BRITT [98] sowie von JASPERT [79]).

(3) Die mit CHAMBERLIN [20] beginnenden Ansätze, die Werbung in die klassische Wirtschaftstheorie, also insbesondere in die Preistheorie, einzubauen (vgl. auch Abschnitt 2.3. S.23).

(4) Die Anwendung der Spieltheorie im Rahmen der Theorie absatzpolitischer Entscheidungen der Unternehmung (z.B. CHARNES und COOPER [21] oder SHUBIK [138]).

(5) Die Durchführung empirischer Untersuchungen über die Wirkung von Werbekampagnen auf die Verkäufe der Unternehmung zum Zwecke der Schätzung von Parametern speziell formulierter Modelle im Sinn der Unternehmensforschung (VIDALE und WOLFE [166]).

Für die Frage, wie eine Werbemaßnahme einer Unternehmung die Markenwahlvorgänge der Haushalte, speziell also die Übergangsmatrix für das betrachtete Konsumgut beeinflußt, sind diese primär statisch orientierten Befunde nur von untergeordneter Bedeutung. Benötigt werden hier - ganz analog wie im Abschnitt 6.2. im Zusammenhang mit den Markenpreisen - Vorstellungen über die Gestalt von m^2 Funktionen $\omega_{ik}(\vec{b})$, die die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten p(i,k) von den Werbemaßnahmen der m Unternehmer zum Ausdruck bringen; diese Werbemaßnahmen selbst seien zunächst durch den Vektor $\vec{b} = (b_1,\ldots,b_m)$ gemessen. Sinnvoll ist es auch hier, von einer verzögerten Nachfragewirksamkeit einer Werbemaßnahme auszugehen. Beträgt diese Verzögerung eine Zeiteinheit, so erhält man allgemein die Beziehung

$$p^{[t+1]}(i,k) = \omega_{ik}(\vec{b}^{[t]})$$

Eine erste - und bisher einzige - Diskussion der Reaktion von Übergangswahrscheinlichkeiten auf eine Werbekampagne einer Unternehmung findet man erst in der Arbeit von KUEHN [91,S.79-91]. Verwandte Probleme, vor allem die Frage der Wirkung psychologischer Faktoren auf die Markenwahl der Konsumenten, werden in den Aufsätzen von KUEHN [92], EVANS [35] sowie EVANS und ROBERTS [36] diskutiert.

Die KUEHNschen Gedankengänge zur Abhängigkeit der Übergangsmatrix von Werbemaßnahmen der das Konsumgut anbietenden Unternehmungen, also zur konkreten Form der Funktionen $\omega_{ik}(\vec{b}^{[t]})$, basieren auf zwei Grundgedanken (KUEHN [91,S.86 ff.]):

(1) Die Haushalte haben eine im Zeitverlauf und für Konsumenten aller m Marken konstante Wahrscheinlichkeit π, eine direkt vorher gekaufte Marke wieder zu kaufen;

(2) die verbleibende Wahrscheinlichkeit $(1-\pi)$ der Markenübergänge verteilt sich auf alle m Marken entsprechend den Werbemaßnahmen jeder Firma, die allerdings erst mit Verzögerung wirksam werden.

Man definiert demnach eine Wahrscheinlichkeit $\pi_i(b_i^{[t]})$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein potentieller Markenwechsler durch die mit $b_i^{[t]}$ zum Ausdruck gebrachte Werbung in der Periode t für eine spezielle Marke K_i als Käufer dieser Marke zum Zeitpunkt t+1 gewonnen wird. Die Werbung werde also wirksam nur in bezug auf potentielle Markenwechsler, nicht in bezug auf alle Haushalte.

Damit erhält man für die Übergangsmatrix $\mathfrak{M}^{[t+1]} = (\omega_{ik}(\vec{b}^{[t]}))$ folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{M}^{[t+1]} = \begin{bmatrix} \pi+\pi_1(b_1^{[t]})(1-\pi) & \pi_2(b_2^{[t]})(1-\pi) & \dots & \pi_m(b_m^{[t]})(1-\pi) \\ \pi_1(b_1^{[t]})(1-\pi) & \pi+\pi_2(b_2^{[t]})(1-\pi) & \dots & \pi_m(b_m^{[t]})(1-\pi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1(b_1^{[t]})(1-\pi) & \pi_2(b_2^{[t]})(1-\pi) & \dots & \pi_m(b_m^{[t]})(1-\pi) \\ \pi_1(b_1^{[t]})(1-\pi) & \pi_2(b_2^{[t]})(1-\pi) & \dots & \pi+\pi_m(b_m^{[t]})(1-\pi) \end{bmatrix}$$

Es ist also allgemein $\omega_{ik}(\vec{b}^{[t]}) = \pi_k(b_k^{[t]})(1-\pi)$ für $i \neq k$ und $\omega_{kk} = \pi+\pi_k(b_k^{[t]})(1-\pi)$ für $k \in \{1,\dots,m\}$. Die Elemente in jeder Spalte der Matrix sind gleich, soweit sie nicht in der Diagonalen stehen. Es muß natürlich gelten:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i(b_i^{[t]}) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeiten π_i werden bei KUEHN als Funktionen nicht nur

einer Größe b_i, sondern der Werbeausgaben einerseits und einem Werbewirksamkeitsmaß andererseits angesetzt, jeweils bezogen auf die Unternehmung, welche die Konsumgutmarke K_i vertreibt; und zwar in der besonders einfachen speziellen Form, daß die π_i proportional abhängig sind von jeder dieser beiden Größen.

Es bedarf unter solchen Bedingungen dann nur der Kenntnis der Größe π sowie der m Funktionen π_i, um die Wirkung von Werbemaßnahmen der konkurrierenden Unternehmungen auf die Übergangsmatrix, also insgesamt auf die Gestalt der Funktionen $\omega_{ik}(\vec{b}^{[t]})$, abzuleiten.

An einer solcher Konstruktion sind mehrere Aspekte unbefriedigend; unter anderem müssen folgende Gesichtspunkte beachtet werden:

(1) Zweifelhaft ist, ob die Wahrscheinlichkeit π des Wiederkaufes einer Marke für alle Marken dieselbe ist, gegebenenfalls müßte π für jede Marke gesondert geschätzt werden.

(2) Die Hypothese, von allen anderen Marken würden die potentiellen Markenwechsler unter den Haushalten durch eine Werbemaßnahme eines bestimmten Unternehmens in gleichem Umfange abgeworben, ist ebenfalls nicht bedenkenlos zu akzeptieren. Immerhin enthält sie eine gewisse Analogie zu der im Abschnitt 6.2. (S.94) vertretenen Hypothese, die Haushalte, die von einer Gütermarke durch Erhöhung ihres Preises abgekommen sind, würden sich auf die übrigen Marken relativ zu deren bisherigen Marktanteilen verteilen.

(3) Für die Form der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten π_i von der allgemeinen Größe b_i oder gar von den Werbeausgaben einerseits und der Werbewirksamkeit andererseits sind keine wirklich plausiblen Annahmen zu formulieren. Hinzu kommt, falls man die Werbewirksamkeit als eigentlich nur qualitativ zu erfassende Größe berücksichtigen will, das Problem der Definition eines möglichst metrischen Werbewirksamkeitsmaßes.

Auch diese Probleme der Abhängigkeit der Übergangsmatrix von den Werbemaßnahmen der Unternehmer seien hier als im Grunde noch nicht ganz gelöst offengelassen. Hinfort sei vielmehr auch hier vorausgesetzt, daß einer Unternehmung bekannt ist, in welcher Weise die Übergangsmatrix durch eine von ihr geplante Werbemaßnahme beeinflußt wird.

§ 7 Entscheidungsmodelle auf der Basis einer MARKOVschen Kette mit diskreter Zeitachse

7.1. Variation eines Markenpreises

Wir gehen zunächst davon aus, daß die Unternehmung, die die Gütermarke K_k anbietet, eine Änderung des Preises ihrer Marke in Erwägung zieht. Erinnert sei nocheinmal an die im Abschnitt 6.1.1. formulierten Annahmen über die Zielfunktion und die Kostensituation dieser Unternehmung, sowie an die Hypothesen des Abschnitts 6.1.2., die die konkrete Form der Markenübergangsprozesse bei den Haushalten betreffen.

7.1.1. Allgemeine Darstellung des Modells

Bei der Unternehmung, die die Konsumgütermarke K_k anbietet, so sei vorausgesetzt, würden zum Zeitpunkt t=0 preispolitische Überlegungen angestellt mit der Absicht, den Umsatzgewinn dieser Unternehmung zu maximieren.

Das Prinzip der Gewinnmaximierung, dem die Unternehmung ausschließlich folgt, erhalte eine dynamische Formulierung. Maximiert werde keine einzelne periodenbezogene Gewinngröße, sondern alle zukünftigen Periodengewinne, die durch Diskontierung auf den Zeitpunkt 0 zu einer Größe zusammengefaßt, also vergleichbar und addierbar gemacht werden.

Die Wirkung anderer absatzpolitischer Instrumente, also etwa der Absatzmethoden, der Produktgestaltung und insbesondere der Werbung, bleibe außer Betracht; es gelte also eine bei der Diskussion wirtschaftstheoretischer Entscheidungsmodelle übliche allgemeine ceteris-paribus-Bedingung.

Es werde insbesondere auch angenommen, daß irgendeine Preisvariation bei der Marke K_k keine Preisreaktionen bei anderen Anbietern des Konsumgutes K hervorruft. Diese Annahme entspricht zwar im Prinzip der ältesten theoretischen Lösung des Problems der Preisbildung bei oligopolistischer Angebotsstruktur, nämlich der COURNOTschen [23], ist aber nicht mehr im Einklang mit moderneren, insbesondere auch dynamischen Oligopoltheorien (vgl. etwa GUTENBERG [57,S.265 ff.]; HALLER [60]; KRELLE [90,S.247-368]; SHUBIK [139]; VON STACKELBERG [145,S. 206-218]).

Wie bereits ausführlich im Paragraphen 5 gezeigt wurde, ist der Vektor $\vec{a}^{(t)}$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten beim t-ten Markenwahlvorgang durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} . \mathcal{M}^t$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p^{[t+1]}(i,k)$ des Überganges von der Marke K_i zur Marke K_k werden nun, entsprechend den Ausführungen in den Abschnitten 5.5.4. (S.85 ff.) und 6.2. (S.93 ff.), als Funktionen $\psi_{ik}(\vec{q}^{[t]})$ des Preisvektors $\vec{q}^{[t]} = (q_1^{[t]},\ldots,q_m^{[t]})$ angesetzt. Erfolgt für t=0 eine Änderung von q_k und bleibt dann der Vektor $\vec{q}$ invariant im Zeitablauf, so gilt allgemein:

$$p^{[1]}(i,k) = \psi_{ik}(\vec{q}^{[0]}) = p^{[2]}(i,k) = \ldots = p^{[t]}(i,k) = \ldots$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten sind also zwar gegenüber früher verändert, bleiben aber dann im Zeitablauf wieder konstant.

Definieren wir

$$\mathcal{M}(\vec{q}^{[0]}) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(\vec{q}^{[0]}) & \cdots & \cdots & \psi_{1m}(\vec{q}^{[0]}) \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \psi_{ik}(\vec{q}^{[0]}) & \\ \psi_{m1}(\vec{q}^{[0]}) & \cdots & \cdots & \psi_{mm}(\vec{q}^{[0]}) \end{bmatrix}$$

so erhält die obige Beziehung folgende Form:

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} . \left[\mathcal{M}(\vec{q}^{[0]})\right]^t$$

Die Anzahl der Haushalte, die sich beim t-ten Wahlvorgang für die Marke K_k entscheiden, beträgt erwartungsgemäß (vgl. Abschnitt 5.3., S.67)

$$E\, N_k = N . a^{(t)}(k)$$

Wir setzen die Stückkosten der Unternehmung, die die Marke K_k herstellt, als konstant an und bezeichnen sie mit γ_k. Dann ist für eine Einheit der Marke K_k der Stückgewinn $(q_k - \gamma_k)$. Der Gewinn der Unternehmung, die K_k anbietet, beträgt beim t-ten Wahlvorgang demnach erwartungsgemäß $N(q_k^{[0]} - \gamma_k)a^{(t)}(k)$. Wir führen einen auf eine Periode

bezogenen Abzinsungsfaktor α ein, der definiert ist mit

$$\alpha = \frac{100}{100+\xi}$$

wenn ξ den Zinssatz in Prozent bezeichnet. Es gilt dann $0<\alpha<1$. Diskontiert man den beim t-ten Wahlvorgang erwarteten Gewinn auf den Zeitpunkt t=0, so beträgt der diskontierte Gewinn $G_k^{[t]}$ erwartungsgemäß

$$E\, G_k^{[t]} = N(q_k^{[0]} - \gamma_k).a^{(t)}(k).\alpha^t$$

Für alle nach t=0 erwarteten Gewinne der Unternehmung, die auf diesen Zeitpunkt diskontiert werden, erhält man

$$E\, G_k = N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \sum_{t=1}^{\infty} a^{(t)}(k).\alpha^t \qquad \text{(VII.1.)}$$

Es ist nun, wie bereits im Abschnitt 5.2.1. (S.54) gezeigt wurde, allgemein:

$$a^{(t)}(k) = \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).p^{(t)}(i,k)$$

und

$$p^{(t)}(i,k) = \sum_{\nu_1=1}^{m} \cdots \sum_{\nu_{t-1}=1}^{m} p(i,\nu_{t-1}). \ \cdots \ .p(\nu_1,k)$$

Setzt man in diese letztere Beziehung die Gleichung

$$p(i,k) = \psi_{ik}(\vec{q}^{[0]})$$

ein, so erhält man

$$p^{(t)}(i,k) = \sum_{\nu_1=1}^{m} \cdots \sum_{\nu_{t-1}=1}^{m} \psi_{i,\nu_{t-1}}(\vec{q}^{[0]}). \ \cdots \ . \psi_{\nu_1,k}(\vec{q}^{[0]})$$

Wir schreiben nun zur Vereinfachung statt

$$a^{(t)}(k) = \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i).p^{(t)}(i,k)$$

$$a^{(t)}(k) = \vec{a}^{(0)}. \left[\mathfrak{M}(\vec{q}^{[0]})\right]^t .{}^t\vec{e}_k$$

mit

$$\vec{e}_k = (0,0,\ldots,1,\ldots,0,0)$$

Damit erhält man wegen (VII.1.)

$$E\,G_k = N.(q_k - \gamma_k).\sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)}.\left[\mathfrak{M}(\vec{q}^{[0]})\right]^t.{}^t\vec{e}_k.\alpha^t \qquad \text{(VII.2.)}$$

Soll der Erwartungswert des Gewinnes G_k unter den angegebenen Bedingungen durch eine Änderung von $q_k^{[0]}$ maximiert werden, so müssen die Bedingungen

$$\frac{\partial E\,G_k}{\partial q_k^{[0]}} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 E\,G_k}{\partial (q_k^{[0]})^2} < 0$$

erfüllt sein.

Das Vorhaben, die Extrema von $E\,G_k$ allgemein theoretisch zu bestimmen, erscheint angesichts des komplizierten Ausdrucks (VII.2.) für diese Größe wenig aussichtsreich. Ihre Kenntnis wäre auch deshalb nicht von großem Nutzen, weil es in aller Regel an genaueren Vorstellungen von den Funktionen ψ_{ik} fehlt.

Daher begnügen wir uns mit einer komparativen Betrachtung. Das heißt, wir gehen von zwei alternativen Größen für $q_k^{[0]}$ aus, nehmen an, daß Schätzungen der ihnen entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten vorliegen, und ermitteln zwei Erwartungsgrößen für den Gewinn der Unternehmung, die dann verglichen werden.

7.1.2. Komparative Betrachtung

Der Preis der Marke K_k eines Konsumgutes K zum Zeitpunkt t=0 betrage q_k. Die Unternehmung, die die Marke K_k herstellt, erwäge eine Änderung des Preises ihrer Marke. Der in Betracht gezogene neue Preis sei q_k'. Gefragt ist, ob durch diese beabsichtigte Preisänderung die Gewinnsituation der Unternehmung verbessert werden kann.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Übergangsmatrix, die die Markenwahlprozesse der Haushalte repräsentiert, wenn q_k der für die Marke K_k festgesetzte Preis ist. $\mathfrak{M}'$ sei dagegen die Übergangsmatrix, die sich mit einer Verzögerung von einer Zeiteinheit einstellt, wenn der Preis der Marke K_k von q_k auf q_k' geändert wird.

Sei G_k der auf den Zeitpunkt t=0 diskontierte gesamte zukünftige Gewinn, der unter Beibehaltung des ursprünglichen Preises q_k für die Marke K_k erzielt wird. Sei weiter G_k' der auf den Zeitpunkt t=0 diskontierte zukünftige Gewinn, der unter Einführung des in Erwägung gezogenen neuen Preises q_k' erreicht werden kann.

Die Preisänderung von q_k auf q_k' ist dann für die K_k herstellende Unternehmung vorteilhaft, wenn

$$E\,G_k' > E\,G_k$$

ist, wenn also, unter Berücksichtigung von (VII.2.), gilt:

$$N(q_k'^{[0]} - \gamma_k) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^t \cdot \vec{e}_k \cdot \alpha^t > N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^t \cdot \vec{e}_k \cdot \alpha^t \qquad \text{(VII.3.)}$$

der neue, auf t=0 diskontierte Gesamtgewinn also erwartungsgemäß größer ist als der bei unverändertem Markenpreis q_k zu erzielende Gewinn.

Im Anhang dieser Arbeit wird gezeigt, wie die zu vergleichenden Gewinngrößen $E\,G_k$ und $E\,G_k'$ berechenbar sind. Der Rechengang wird außerdem an einem konkreten Zahlenbeispiel erläutert.

7.2. Variation der Werbeintensität

Es wird jetzt angenommen, die Unternehmung, die die Gütermarke K_k anbietet, fasse eine Änderung ihrer Werbeintensität ins Auge. Die Intensität der Werbung für die Marke K_k werde durch eine einzige Größe b_k gemessen, die identisch sein soll mit dem Umfang des Werbebudgets in einer Markenwahlperiode der Haushalte. Qualitative Aspekte der Werbemaßnahmen bleiben also - anders als etwa bei KUEHN (vgl. 6.3. S.98-99) - außer Betracht.

7.2.1. Allgemeine Darstellung des Modells

Das Prinzip der Gewinnmaximierung erhalte wiederum, wie im Abschnitt 7.1.1., eine dynamische Formulierung, es soll also der gesamte zukünftige und auf den Zeitpunkt t=0 diskontierte Gewinn maximiert werden. Auch hier gelte eine allgemeine ceteris-paribus-Bedingung.

Insbesondere sei vorausgesetzt, daß keine Preisvariationen bei den konkurrierenden Marken erfolgen und daß eine Intensivierung oder Reduzierung werblicher Maßnahmen bei der Unternehmung, die K_k herstellt, keine werbepolitischen Reaktionen bei anderen Unternehmungen erzeugt. Auch diese Annahme ist natürlich - genau wie die analoge Annahme im Abschnitt 7.1.1. (S.100) - wirtschaftstheoretischen Einwänden ausgesetzt, sei aber trotzdem hier akzeptiert.

Die Wahrscheinlichkeiten $p^{[t-1]}(i,k)$ des Überganges von der Marke K_i zur Marke K_k werden nun, entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 6.3. (S.97 ff.), als Funktionen $\omega_{ik}(\vec{b}^{[t]})$ des Vektors $\vec{b}^{[t]} = (b_1^{[t]}, \ldots, b_m^{[t]})$ der Werbeausgaben der das Konsumgut K anbietenden Unternehmungen in der Periode t angesetzt. Erfolgt für t=0 eine Änderung von b_k und bleibt dann der Vektor $\vec{b}^{[t]}$ invariant im Zeitablauf, so gilt allgemein:

$$p^{[1]}(i,k) = \omega_{ik}(\vec{b}^{[0]}) = p^{[2]}(i,k) = \ldots = p^{[t]}(i,k) = \ldots$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind also - genau wie im Abschnitt 7.1.1. - zwar revidiert, bleiben dann aber im Zeitablauf wieder konstant.

Definieren wir

$$\mathfrak{M}(\vec{b}^{[0]}) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(\vec{b}^{[0]}) & \ldots & & \ldots & \omega_{1m}(\vec{b}^{[0]}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdot & & \omega_{ik}(\vec{b}^{[0]}) & & \cdot \\ & & & & \\ \omega_{m1}(\vec{b}^{[0]}) & & & & \omega_{mm}(\vec{b}^{[0]}) \end{bmatrix}$$

so erhält man für den Vektor $\vec{a}^{(t)}$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} \left[\mathfrak{M}(\vec{b}^{[0]})\right]^t$$

Die Anzahl der Haushalte, die sich beim t-ten Wahlvorgang für die Marke K_k entscheiden, beträgt erwartungsgemäß

$$E\, N_k = N.a^{(t)}(k)$$

Wir setzen jetzt im Gegensatz zu unserem Vorgehen im Abschnitt 7.1.1. als Stückkosten γ_k der Unternehmung, die K_k herstellt, die gesamten Stückkosten ausschließlich Werbekosten an; γ_k sei wiederum konstant; der ebenfalls als konstant angenommene Preis einer Einheit der Marke K_k betrage q_k; mit α sei wie früher der Abzinsungsfaktor bezeichnet. Es werde außerdem unterstellt, daß die Kosten $b_k^{[t]}$ der Werbemaßnahmen für die Marke K_k in der t-ten Periode insgesamt zu Beginn dieser Periode anfallen.

Diskontiert man den beim t-ten Wahlvorgang erwarteten Gewinn mit Berücksichtigung der Werbekosten $b_k^{[t-1]} = b_k^{[0]}$ der vorhergehenden Markenwahlperiode auf den Zeitpunkt t=0, so beträgt diese Größe $G_k^{[t]}$ erwartungsgemäß

$$E\, G_k^{[t]} = N(q_k - \gamma_k).a^{(t)}(k).\alpha^t - b_k^{[0]}.\alpha^{t-1}$$

Für alle nach t=0 erwarteten Gewinne der Unternehmung, die auf diesen Zeitpunkt diskontiert werden, erhält man

$$E\, G_k = N(q_k - \gamma_k).\sum_{t=1}^{\infty} a^{(t)}(k).\alpha^t - \sum_{t=0}^{\infty} b_k.\alpha^t \qquad \text{(VII.4.)}$$

wenn die Werbekosten schon ab t=0 mit einbegriffen werden. Dies ist folgerichtig, weil eine um eine Zeiteinheit verzögerte Werbewirksamkeit angenommen wurde.

Schreiben wir wieder zur Vereinfachung für die absolute Wahrscheinlichkeit der Wahl der Marke K_k beim t-ten Wahlvorgang

$$a^{(t)}(k) = \vec{a}^{(0)}.\left[\mathfrak{M}(\vec{b}^{[0]})\right]^t.\vec{e}_k \quad ,$$

dann ergibt sich wegen (VII.4.)

$$E\, G_k = N(q_k - \gamma_k).\sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)}\left[\mathfrak{M}(\vec{b}^{[0]})\right]^t.\vec{e}_k.\alpha^t - \sum_{t=0}^{\infty} b_k.\alpha^t \qquad \text{(VII.5.)}$$

Soll der Erwartungswert des gesamten diskontierten Gewinnes G_k unter den angegebenen Bedingungen durch eine Änderung von $b_k^{[0]}$ maximiert werden, so müssen die Bedingungen

$$\frac{\partial E\, G_k}{\partial b_k^{[0]}} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 E\, G_k}{\partial (b_k^{[0]})^2} < 0$$

gelten. Auch hier werde statt einer Lösung dieses Extremwertproblems nur eine vergleichende Betrachtung zweier Gewinngrößen durchgeführt.

7.2.2. Komparative Betrachtung

Das bisherige Werbebudget einer Unternehmung, die die Marke K_k herstellt, betrage b_k. In Betracht gezogen werde eine Änderung des für eine Markenwahlperiode anzusetzenden Werbeaufwandes auf b_k'. Dieses Werbebudget soll nicht nur einmalig eingeführt, sondern gegebenenfalls langfristig beibehalten werden. Gefragt ist, ob durch die beabsichtigte dauerhafte Änderung des Werbebudgets die Gewinnsituation der Unternehmung verbessert werden kann.

Es sei $\mathfrak{M}$ die Übergangsmatrix, die die Markenwahlprozesse der Haushalte zum Ausdruck bringt, wenn der Werbeaufwand in der vorhergehenden Periode b_k betrug. $\mathfrak{M}'$ ist die Übergangsmatrix, die sich ab dem ersten Markenwahlprozeß der Haushalte einstellt, wenn vorher der Werbeaufwand der K_k herstellenden Unternehmung auf b_k' geändert wurde.

G_k bezeichne den auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten gesamten zukünftigen Gewinn, der erzielt wird, wenn das Werbebudget b_k beibehalten wird. G_k' sei dagegen der diskontierte Zukunftsgewinn, der mit einem Werbebudget von b_k' je Markenwahlperiode erreicht werden kann.

Die Änderung des Werbebudgets von b_k auf b_k' bei der K_k herstellenden Unternehmung ist gewinnmehrend, wenn

$$E\,G_k' > E\,G_k$$

ist, wenn also nach (VII.5.) gilt:

$$N(q_k - \gamma_k) \sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)} \mathfrak{M}'^{t} \cdot {}^{t}\vec{e}_k \cdot \alpha^t - \sum_{t=0}^{\infty} b_k' \alpha^t$$

$$> N(q_k - \gamma_k) \sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^t \cdot {}^{t}\vec{e}_k \cdot \alpha^t - \sum_{t=0}^{\infty} b_k \alpha^t \qquad \text{(VII.6.)}$$

Im Anhang dieser Arbeit wird hierzu ein numerisches Beispiel durchgerechnet.

§ 8 Entscheidungsmodelle auf der Basis einer MARKOVschen Kette mit stetiger Zeitachse

Die Gedankengänge des letzten Paragraphen basieren auf der Annahme, die Markenwahlvorgänge aller Haushalte einer Volkswirtschaft seien zu beschreiben durch eine einzige Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, deren Elemente Funktionen der Markenpreise beziehungsweise Werbebudgets der Markenanbieter sind. Es ist jetzt zu untersuchen, wie dasselbe Problem zu lösen ist, wenn man von einer Differentialmatrix der Übergangsraten, die für alle Haushalte der Volkswirtschaft gültig ist, ausgeht.

8.1. Variation eines Markenpreises

Es seien auch hier die Annahmen über die Zielfunktion und die Kostensituation der Unternehmung gültig, die im Abschnitt 6.1.1. (S.92 ff.) formuliert wurden.

8.1.1. Allgemeine Darstellung des Modells

Der Ausgangspunkt ist hier derselbe wie im Abschnitt 7.1.1. Es soll eine Preissetzung für die Marke K_k zum Zeitpunkt t=0 derart vorgenommen werden, daß die Summe der auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten zukünftigen Gewinne maximal wird. Es gelte wiederum eine allgemeine ceteris-paribus-Bedingung; außerdem sei auch hier die COURNOTsche Annahme gemacht, Preisvariationen für K_k hätten keine Preisreaktionen konkurrierender Anbieter zur Folge.

Wie im Abschnitt 5.5.2. (S.78 ff.) und in den zugehörigen Abschnitten des Anhanges gezeigt wurde, ist der Vektor $\vec{a}(t) = (a_1(t),\ldots,a_m(t))$ der absoluten Verbrauchswahrscheinlichkeiten gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(0).e^{\mathcal{R}t}$$

wobei $\mathcal{R} = (p_{ik})$ die Differentialmatrix der Übergangsraten ist.

Die Raten $p_{ik}^{[t+1]}$ des Überganges von der Marke K_i zur Marke K_k zum Zeitpunkt t+1 werden nun wie im Abschnitt 7.1.1. die Übergangswahrscheinlichkeiten als Funktionen $\varphi_{ik}(\vec{q}^{[t]})$ des Preisvektors $\vec{q}^{[t]} = (q_1^{[t]},\ldots,q_m^{[t]})$ zum Zeitpunkt t angesetzt; erfolgt für t=0 eine Ände-

rung von q_k und bleibt $\vec{q}$ dann konstant, so gilt:

$$p_{ik}^{[t]} = \varphi_{ik}(\vec{q}^{[0]}) \qquad \text{für } t \geq 1 .$$

Wir definieren

$$\mathfrak{R}(\vec{q}^{[0]}) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\vec{q}^{[0]}) & \cdots & \cdots & \varphi_{1m}(\vec{q}^{[0]}) \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \varphi_{ik}(\vec{q}^{[0]}) & \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{m1}(\vec{q}^{[0]}) & \cdots & \cdots & \varphi_{mm}(\vec{q}^{[0]}) \end{bmatrix}$$

so erhält die obige Beziehung für t=1 folgende Form:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(0).e^{\left[\mathfrak{R}(\vec{q}^{[0]})\right]} .t$$

Die Anzahl der Haushalte, die zum Zeitpunkt t die Marke K_k verbrauchen, beträgt offensichtlich erwartungsgemäß

$$E\, N_k = n.\vec{a}(t)$$

Wir setzen wiederum die Stückkosten der Unternehmung, die K_k herstellt, als konstante Größe γ_k an; die Werbekosten seien in dieser Größe enthalten. Außerdem wird ein auf stetige Verzinsung berechneter Abzinsungsfaktor e^{β} eingeführt, wobei definiert ist:

$$\beta = -\frac{\xi}{100}$$

wenn ξ den Zinssatz in Prozent bei organischer Verzinsung darstellt[1].

---

[1] Die Festlegung eines auf organischer Verzinsung beruhenden Zinssatzes ist mit keinen wesentlichen Komplikationen verbunden, denn aus einem vorgegebenen Zinssatz bei nur periodenweiser Verzinsung kann ein gleichwertiger Zinssatz bei stetiger Verzinsung berechnet werden. Sei etwa ξ_1 der Zinssatz bei Verzinsung nach jeweils einer Periode, so berechnet man den entsprechenden Satz bei stetiger Verzinsung aus der Gleichung

$$e^{\frac{\xi}{100}} = \frac{100 + \xi_1}{100}$$

Man erhält $\xi = (\ln(100+\xi_1) - \ln 100).100$

und beispielsweise für $\xi_1 = 5\ \%$

$$\xi = 100(\ln 105 - \ln 100) \approx 4{,}879$$

Wir haben eine Verzögerung der Reaktion der Übergangsraten von einer Zeiteinheit angenommen; deshalb ändert sich an den Markenwahlvorgängen der Haushalte im Zeitintervall $[0,1)$ nichts, wenn $\vec{q}^{[0]}$ verändert wird. Zu diskontieren ist nur der Erwartungswert der Gesamtheit G_k der Gewinne, die für die Marke K_k ab t=1 anfallen. Man erhält:

$$E\,G_k = N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \int_1^{\infty} a_k(t).e^{\beta t}\,dt \qquad \text{(VIII.1.)}$$

Dabei wird der Umstand vernachlässigt, daß im Intervall $[0,1)$ bereits ein eventuell revidierter Preis gilt.

Setzt man wiederum in analoger Weise wie im Paragraphen 7

$$a_k(t) = e^{\left[\mathcal{R}(\vec{q}^{[0]})\right].t}.\vec{t}_{e_k}$$

mit $\vec{e}_k$ als Einheitszeilenvektor mit m Komponenten, so bekommt man

$$E\,G_k = N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \int_1^{\infty} \vec{a}(0).e^{\left[\mathcal{R}(\vec{q}^{[0]})\right].t}.\vec{t}_{e_k}.e^{\beta t}\,dt \qquad \text{(VIII.2.)}$$

$q_k^{[0]}$ ist dergestalt festzulegen, daß dieser Ausdruck ein Maximum annimmt.

8.1.2. Komparative Betrachtung

Wir gehen aus von einem Preis q_k, der gegebenenfalls zum Zeitpunkt t=0 auf q_k' geändert werden soll mit dem Ziel, den zu erwartenden zukünftigen Gewinn der Unternehmung zu vergrößern.

Die beiden Differentialmatrizen der Übergangsraten seien mit $\mathcal{R}$ beziehungsweise $\mathcal{R}'$ bezeichnet. Die Unternehmensleitung, so wird angenommen, habe eine konkrete Vorstellung von diesen beiden Matrizen. Es ergibt sich folgende Ungleichung:

$$N(q_k'^{[0]} - \gamma_k) \int_1^{\infty} \vec{a}(0).e^{\mathcal{R}'.t}.\vec{t}_{e_k}.e^{\beta t}\,dt$$

$$> N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \int_1^{\infty} \vec{a}(0).e^{\mathcal{R}.t}.\vec{t}_{e_k}.e^{\beta t}\,dt \qquad \text{(VIII.3.)}$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, dann wirkt sich eine Durchführung der beabsichtigten Preisvariation gewinnerhöhend aus.

Die Berechnung der zu vergleichenden Gewinngrößen E G_k und E G_k' wird im Anhang dieser Arbeit gezeigt und wiederum an einem Zahlenbeispiel erläutert.

8.2. Variation der Werbeintensität

Zu diskutieren ist jetzt das Problem der optimalen Intensität der Werbung unter der Voraussetzung, die Markenwahlprozesse der Haushalte seien durch einen MARKOVschen Prozeß mit stetiger Zeitachse repräsentiert.

8.2.1. Allgemeine Darstellung des Modells

Bezüglich Kostensituation und Zielfunktion wird von denselben Annahmen ausgegangen, die für den Abschnitt 7.2.1. (S.104 ff.) galten.

Die Raten $p_{ik}^{[t+1]}$ des Überganges von der Marke K_i zur Marke K_k zum Zeitpunkt t+1 werden als Funktionen $\eta_{ik}(\vec{b}^{[t]})$ des Vektors $\vec{b}^{[t]} = (b_1^{[t]},\ldots,b_m^{[t]})$ der Werbeausgabenraten zum Zeitpunkt t aufgefaßt. Der Vektor $\vec{b}^{[t]}$ erfährt hier also eine gegenüber Abschnitt 7.1. leicht variierte Interpretation. Geht man davon aus, daß in einer Zeiteinheit für die Marke K_k der Betrag b_k für Werbung ausgegeben wird, der sich im Zeitablauf nicht ändert, so kann man unter Zugrundelegung einer stetigen Zeitachse sagen, in einem kleinen Zeitintervall der Länge dt wird der Betrag von $b_k dt$ für Werbung verwendet. Zugrundegelegt wird hier die Hypothese, die Werbeausgaben einer Periode würden gleichmäßig über diese Periode verteilt. Erfolgt für t=0 eine Änderung des Werbebudgets b_k und bleibt $\vec{b}$ dann konstant, so gilt:

$$p_{ik}^{[t]} = \eta_{ik}(\vec{b}^{[0]}) \qquad \text{für } t \geq 1.$$

Definieren wir in analoger Weise wie bisher

$$\mathfrak{R}\,(\vec{b}^{[0]}) = \begin{bmatrix} \eta_{11}(\vec{b}^{[0]}) & \cdots & \cdots & \eta_{1m}(\vec{b}^{[0]}) \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \eta_{ik}(\vec{b}^{[0]}) & \\ \eta_{m1}(\vec{b}^{[0]}) & & & \eta_{mm}(\vec{b}^{[0]}) \end{bmatrix}$$

so bekommen wir für $t \geq 1$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(0).e^{\left[\mathfrak{R}(\vec{b}^{[0]})\right].t}$$

für die absoluten Verbrauchswahrscheinlichkeiten.

Die Stückkosten der Unternehmung, die K_k herstellt, seien γ_k; Werbekosten seien in dieser Größe nicht enthalten. Wiederum bezeichnet q_k den Preis einer Einheit der Gütermarke K_k. Als Abzinsungsfaktor bei stetiger Verzinsung wird wie in 8.1.1. die Größe e^{β} verwendet.

Auch hier ist wegen der angenommenen Verzögerung der Reaktion der Matrix der Übergangsraten auf Variationen der Werbeintensität nur der erwartungsgemäße Gesamtgewinn ab t=1 zu diskontieren. Voraussetzungsgemäß ändert sich im Intervall $[0,1)$ am Gewinn - hier ohne Einbezug von Werbekosten verstanden - nichts. Konsequent ist es jedoch auch hier, zu berücksichtigen, daß gegebenenfalls das Werbebudget bereits ab t=0 verändert ist. Man erhält:

$$E\,G_k = N(q_k - \gamma_k) \int_1^{\infty} a_k(t).e^{\beta t}\,dt - \int_0^{\infty} b_k.e^{\beta t}\,dt \qquad \text{(VIII.4.)}$$

Schreiben wir wieder

$$a_k(t) = \vec{a}(0).e^{\left[\mathfrak{R}(\vec{b}^{[0]})\right]t}.\vec{e}_k \quad ,$$

dann bekommt man hier als zu maximierende Größe

$$E\,G_k = N(q_k - \gamma_k) \int_1^{\infty} \vec{a}(0).e^{\left[\mathfrak{R}(\vec{b}^{[0]})\right]t}.\vec{e}_k.e^{\beta t}\,dt - \int_0^{\infty} b_k.e^{\beta t}\,dt$$

(VIII.5.)

8.2.2. Komparative Betrachtung

Geht man wiederum aus von zwei alternativen Werbebudgets oder Werbeausgabenraten, die mit b_k bzw. b_k' bezeichnet werden und sind $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}'$ die zugeordneten Matrizen der Übergangsraten, so ist die Änderung von b_k auf b_k' dann gewinnerhöhend, wenn die Ungleichung

$$E\,G_k' = N(q_k - \gamma_k) \int_1^\infty \vec{a}(0).e^{\mathfrak{R}'t}.\vec{e}_k.e^{\beta t}\,dt - \int_0^\infty b_k'.e^{\beta t}\,dt$$

$$> E\,G_k = N(q_k - \gamma_k) \int_1^\infty \vec{a}(0).e^{\mathfrak{R}t}.\vec{e}_k.e^{\beta t}\,dt - \int_0^\infty b_k.e^{\beta t}\,dt \qquad \text{(VIII.6.)}$$

erfüllt ist.

Auf ein numerisches Beispiel im Anhang dieser Arbeit wird verwiesen.

8.3. Schlußbemerkung

Bei den in § 7 und § 8 entwickelten Entscheidungsmodellen wurde vereinfachend davon ausgegangen, daß zum Zeitpunkt t=0 eine den Umsatzgewinn maximierende Strategie bezüglich Preis- und Werbepolitik der Unternehmung gesucht wird, die dann ein für allemal beizubehalten ist. Realistischer ist es, anzunehmen, daß von der anbietenden Unternehmung in jeder Periode aufs neue aus einer Menge von Alternativen bezüglich des Einsatzes verschiedener absatzpolitischer Maßnahmen eine Strategie auszuwählen ist derart, daß die Gesamtstrategie aus einer Abfolge verschiedener Periodenstrategien besteht.

Eine Entscheidungsproblematik dieser Art zum Einsatz verschiedener werbepolitischer Alternativen der Unternehmung wird bei HERNITER und MAGEE [69,S.110-112] diskutiert. Die Untersuchung beschränkt sich auf ein MARKOV-Modell erster Ordnung mit diskreter Zeitachse. Die optimale Werbepolitik kann in einem solchen Fall iterativ gefunden werden, und zwar entweder mittels der BELLMANschen "Flooding Technique" [6] oder der HOWARDschen "Policy Improvement Routine" [77,S.37 ff. und 107 ff.]. Dies gilt bei allgemeiner Anzahl von Zuständen unglücklicherweise nur für den wenig interessanten Fall von alternativen

Werbemaßnahmen, die sich an die augenblicklichen Verbraucher oder Kunden von nur einer Marke richten. Solche Maßnahmen sind etwa Kundenbesuche oder persönlich adressierte Werbeschreiben, also Maßnahmen der Direct Promotion. Für die üblichen Werbemethoden wie Rundfunk- und Fernsehwerbung oder Zeitschriftenwerbung (Broadcast Promotion), bei denen eine werbliche Beeinflussung von Konsumenten aller Marken vorliegt, gibt es bisher nur eine Lösung für den Fall zweier konkurrierender Gütermarken (vgl. hierzu HERNITER und MAGEE [69,S.112]).

KAPITEL 4: DIE DURCHFÜHRUNG EMPIRISCHER UNTERSUCHUNGEN ZUR PROGNOSE VON MARKTANTEILEN

§ 9 Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und Prüfung von Modellhypothesen

Im Verfolg der theoretischen Erörterungen der Kapitel 2 und 3 dieser Arbeit wurden verschiedene Modellhypothesen entwickelt, unter anderem

(1) Grundannahmen über die Ordnung des dem Markenwahlverhalten der Haushalte zugrundeliegenden MARKOVschen Prozesses;

(2) Annahmen darüber, ob ein bestimmtes lerntheoretisches Markenwahlschema für alle Haushalte in gleicher Weise gültig oder ob individuelle Behandlung der Haushalte vonnöten sei;

(3) Annahmen über die Konstanz des Markenwahlschemas im Zeitverlauf.

Für empirische Untersuchungen zur Entwicklung von Marktanteilen konkurrierender Unternehmungen auf der Basis hier entwickelter Modelle ist eine statistische Prüfung von Modellhypothesen solcher Art wünschenswert.

Weiter wurden bisher die in die Modelle eingehenden Wahrscheinlichkeiten als bekannt angenommen. Ihre objektive Schätzung ist ein weiteres wesentliches Problem für praktische Anwendungen lerntheoretischer Modelle zur Markenwahl.

Daher werden zunächst zwei verschiedene Schätzverfahren für diese Wahrscheinlichkeiten untersucht. Ein Überblick über die Möglichkeiten der statistischen Prüfung verschiedener Modellhypothesen schließt sich an.

9.1. Schätzverfahren für Wahrscheinlichkeiten

9.1.1. Relative Häufigkeiten als maximum-likelihood-Schätzungen für Wahl- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten

Angenommen, über das Markenwahlverhalten einer Stichprobe von n* Haushalten in bezug auf ein Konsumgut K lägen Beobachtungen vor; und

zwar seien für jeden dieser Haushalte Aufzeichnungen vorhanden über die Aufeinanderfolge der Wahlvorgänge in einer Periode, in der, so sei vorausgesetzt, bei jedem Haushalt simultan T Wahlakte 1,...,t, ...,T stattgefunden haben. Insgesamt seien also $n = n^* \cdot T$ Wahlvorgänge in ihrem zeitlichen Zusammenhang registriert worden.

Wir nehmen für einen Augenblick an, das Multinomialmodell des Paragraphen 4 sei das zur Beschreibung des Markenwahlverhaltens adäquate Modell. Außerdem sei n(i) die Anzahl der Entscheidungen für die Gütermarke K_i mit

$$\sum_{i=1}^{m} n(i) = n$$

Dann gilt der folgende Satz:

Satz 1: Sind die zu schätzenden Wahlwahrscheinlichkeiten p(i) mit $i \in \{1,...,m\}$ für alle N Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant, so ist

$$\hat{p}(i) = \frac{n(i)}{n} \qquad \text{(IX.1.)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für p(i).

Der Beweis für diese Behauptung wird im Anhang dieser Arbeit durchgeführt. Zwei Folgerungen aus diesem Satz liegen nahe:

(1) Sind die Wahlwahrscheinlichkeiten zwar konstant im Zeitablauf, jedoch nicht notwendigerweise gleich für alle Haushalte, so ist ($i \in \{1,...,m\}$)

$$\hat{p}_j(i) = \frac{n_j(i)}{T} \qquad \text{(IX.1a.)}$$

eine maximum-likelihood-Schätzung für die individuelle Wahlwahrscheinlichkeit $p_j(i)$ des Haushaltes H_j; T ist dabei die Anzahl der Wahlakte des Haushaltes H_j in der Betrachtungsperiode, $n_j(i)$ die Anzahl der Entscheidungen des Haushaltes H_j für die Marke K_i.

(2) Sind die Wahlwahrscheinlichkeiten zwar gleich für alle Haushalte, jedoch nicht notwendigerweise konstant im Zeitablauf, dann ist

$$\hat{p}^{[t]}(i) = \frac{n^{[t]}(i)}{n^*} \qquad \text{(IX.1b.)}$$

eine maximum-likelihood-Schätzung für die Wahlwahrscheinlichkeit der Haushalte zum Zeitpunkt t; n^* ist die Anzahl der zu diesem Zeitpunkt beobachteten Wahlvorgänge, $n^{[t]}(i)$ die Anzahl der Entscheidungen für die Marke K_i in diesem Zeitpunkt.

Faßt man den Markenwahlprozeß als MARKOVsche Kette erster Ordnung auf, so ergeben sich keine theoretischen Komplikationen. Wir gehen davon aus, daß n^* Haushalte während einer Periode, die je Haushalt T sukzessive Markenübergänge umfaßt, beobachtet wurden.

Es sei $n^{[0]}(i)$ die Anzahl der Haushalte, die ursprünglich die Marke K_i verbrauchten; dabei gilt natürlich

$$\sum_{i=1}^{m} n^{[0]}(i) = n^* \quad ;$$

wir machen weiter die naheliegende Annahme, die $n^{[0]}(i)$ seien multinomialverteilt mit Wahrscheinlichkeiten $a^{(0)}(1),\ldots,a^{(0)}(i),\ldots,a^{(0)}(m)$ und Stichprobenumfang n^*. Außerdem sei $n(i,k)$ die Anzahl der Übergänge von K_i nach K_k, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} n(i,k) = n$$

Unter diesen Bedingungen gilt folgender Satz (vgl. ANDERSON und GOODMAN [3,S.92 und S.104-105] sowie GOODMAN [54,S.186]), der im Anhang dieser Arbeit bewiesen wird:

Satz 2: Falls die zu schätzenden Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant sind, ist $(i,k \in \{1,\ldots,m\})$

$$\hat{p}(i,k) = \frac{n(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n(i,l)} \qquad \text{(IX.2.)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für die Übergangswahrscheinlichkeit p(i,k) ebenso wie $(i \in \{1,\ldots,m\})$

$$\hat{a}^{(0)}(i) = \frac{n^{[0]}(i)}{n^*}$$

für die Anfangswahrscheinlichkeit $a^{(0)}(i)$.

Ordnet man die empirisch vorgefundenen Übergangshäufigkeiten $n(i,k)$ in einer m-reihigen Matrix $\mathfrak{N} = (n(i,k))$ an, so braucht man also jedes Element dieser Matrix nur durch die jeweilige Zeilensumme zu dividieren, um den Schätzwert für die ihm entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten.

Auch hier können wiederum zwei offensichtliche Folgerungen angegeben werden:

(1) Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwar konstant im Zeitverlauf, jedoch nicht notwendigerweise gleich für alle Haushalte, so ist

$$\hat{p}_j(i,k) = \frac{n_j(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n_j(i,l)} \qquad \text{(IX.2a.)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für $p_j(i,k)$; $n_j(i,l)$ ist dabei die Anzahl der beim Haushalt H_j beobachteten Übergänge von K_i zu K_k.

(2) Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwar gleich für alle Haushalte, jedoch nicht notwendigerweise konstant im Zeitablauf, so ist

$$\hat{p}^{[t]}(i,k) = \frac{n^{[t]}(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n^{[t]}(i,l)} \qquad \text{(IX.2b.)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für die Übergangswahrscheinlichkeit $p^{[t]}(i,k)$; $n^{[t]}(i,l)$ bedeutet dabei die Anzahl der Übergänge von K_i zu K_l beim t-ten kollektiven Wahlvorgang.

Analoge Ergebnisse erhält man, wie man aus dem Beweis zu Satz 2 leicht ersehen kann, für MARKOVsche Ketten höherer als erster Ordnung, die allerdings (vgl. Abschnitt 5.6. S.89) hier nicht ausführlich diskutiert werden sollen. Auch auf eine Erörterung des Schätzproblems für Übergangsraten eines MARKOVschen Prozesses mit stetiger Zeitachse wird verzichtet.

Vergegenwärtigt man sich die Qualitäten der auf R.A. FISHER [46, S.[illegible] ff.] zurückgehenden maximum-likelihood-Schätzung (vgl. hierzu etwa CRAMER [25,S.498 ff.], SCHMETTERER [131,S.221 ff.], VAN DER

WAERDEN [167,S.148 ff.]), so erscheint die Schätzung von Übergangswahrscheinlichkeiten auf den ersten Blick unproblematisch. Wie zur Ermittlung einer maximum-likelihood-Schätzung für die Elemente der Übergangsmatrix einer MARKOVschen Kette erster Ordnung im Zusammenhang mit Markenwahlvorgängen der Haushalte zu verfahren ist, wird im Anhang dieser Arbeit an einem einfachen Beispiel gezeigt. Bei diesem Beispiel wird davon ausgegangen, daß Beobachtungen über mehrere sukzessive Markenwahlvorgänge einer Stichprobe von Haushalten vorliegen.

Will man Übergangswahrscheinlichkeiten mittels relativer Häufigkeiten schätzen, so kommt es entscheidend darauf an, daß die Markenwahlvorgänge der Haushalte im Zeitzusammenhang beobachtet werden. Eine in der Marktforschung gelegentlich angewendete Methode, Änderungen der Konsumgewohnheiten von Haushalten im Zeitablauf empirisch festzustellen, ist die Einrichtung eines sogenannten ständigen Berichterkreises (Panels). Die ausgewählten Haushalte werden verpflichtet, über Art, Menge und Marke der von ihnen gewählten Konsumgüter chronologisch Buch zu führen. Die Aussichten, mittels eines solchen Berichterkreises zuverlässige Schätzwerte für Übergangswahrscheinlichkeiten zu erhalten, sind jedoch nicht allzu günstig angesichts der vielfältigen technisch-organisatorischen Schwierigkeiten, die mit dem Aufbau und der Unterhaltung eines Panels einhergehen. Hierzu gehören vor allem (vgl. z.B. KELLERER [83,S.225; 84,S.457]; ALLISON, ZWICK und BRINSER [1]; BOYD und WESTFALL [13]; QUAKENBUSH und SHAFFER [118]; und insbesondere FERBER [42] sowie FERBER und VERDOORN [43,S.267 ff.]):

(1) Die Unmöglichkeit, ein echtes Zufallspanel überhaupt einzurichten oder gar eine Zeitlang aufrechtzuerhalten;

(2) die in der Regel hohe Mortalitätsrate, also die häufig zu beobachtenden Mitarbeitsverweigerungen seitens der Mitglieder auch von Quotenpanels schon nach kurzer Zeit;

(3) die mangelnde Kontrollierbarkeit der Beeinflussung von Verbrauchsgewohnheiten durch Mitgliedschaft in einem ständigen Berichterkreis;

(4) die Ungenauigkeit der Berichterstattung durch die ausgewählten Haushalte (vgl. hierzu speziell SUDMAN [152]).

Da es in unserem Zusammenhang wesentlich auf die Abfolge von Marken-

wahlvorgängen im Zeitverlauf ankommt, ist eine Ausräumung einiger dieser Probleme mittels Stichprobenrotation (vgl. hierzu Statistisches Bundesamt [147,S.114 ff. und 152 ff.] ; STUBENRAUCH [150]) grundsätzlich nicht möglich.

Damit stellt sich die Frage, ob die Übergangswahrscheinlichkeiten auch dann geschätzt werden können, wenn keine Informationen über die zeitliche Abfolge der Markenwahlvorgänge bei einzelnen Haushalten vorliegen, sondern nur bekannt ist, wieviele Elemente einer Stichprobe sich zu bestimmten Zeitpunkten einer Berichtsperiode in den verschiedenen Verbrauchszuständen befinden. Dieses Problem tritt häufig auf im Zusammenhang mit konkreten Anwendungen von MARKOV-Modellen, beispielsweise im Bereich der Psychologie oder der Agrarwirtschaft (vgl. hierzu die Bemerkungen von HANF [61,S.11-12]). Es soll deshalb im nächsten Abschnitt kurz diskutiert werden.

9.1.2. Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten mittels Zustandsstatt Übergangshäufigkeiten

Wir gehen wiederum davon aus, daß über das Markenwahlverhalten einer Stichprobe von n^* Haushalten in bezug auf ein Konsumgut $K = \{K_1,\ldots,K_m\}$ Beobachtungen vorliegen. Es sei vorausgesetzt, daß die Übergangsmatrix für alle Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant ist. Wir unterstellen, daß die Anzahlen $n(i,k)$ der Übergänge von K_i zu K_k nicht beobachtet werden konnten. Vielmehr sei nur bekannt, wieviele Haushalte sich in jeder Periode in jedem möglichen Verbrauchszustand befanden. Wir bezeichnen die Anzahl der Haushalte, die sich in der Periode t im Zustand K_i befanden, wie früher mit $n^{[t]}(i)$; $t \in \{0,\ldots,T\}$.

Die in der Ökonometrie im Rahmen der Regressionsrechnung eingeführte Methode der kleinsten Quadratsumme (vgl. z.B. FELS [40] und die dort angegebene Literatur) liefert nun ein Verfahren, mit dessen Hilfe die Übergangswahrscheinlichkeiten aus den Stichprobenwerten $n^{[t]}(i)$ geschätzt werden können. Es wurde im Zusammenhang mit Anwendungsproblemen zur Theorie der MARKOVschen Ketten im wesentlichen von MILLER [105], MADANSKY [99] und insbesondere TELSER [156] entwickelt.

Ausgangspunkt ist die Beziehung $(k \in \{1,\ldots,m\})$

$$n^{[t]}(k) = \sum_{i=1}^{m} n^{[t-1]}(i).p(i,k) + v^{[t]}(k) \qquad \text{(IX.3.)}$$

$v^{[t]}(k)$ ist eine Zufallsvariable. Sie ist definiert als Differenz zwischen beobachteter und bei bekannten $n^{[t-1]}(i)$ erwarteter Anzahl der Haushalte, die sich in der Periode t im Zustand K_i befinden.

Wir fassen nun (vgl. TELSER [156,S.277-278]) dieses System (IX.3.) von m Gleichungen auf als linearen Regressionsansatz mit $n^{[t]}(k)$ als Zielvariable und den Größen $n^{[t-1]}(i)$ als erklärenden Variablen. Dabei ist zu beachten, daß die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{m} n^{[t-1]}(i) = n^*$$

sicher gilt, weswegen nur (m-1) Variablen $n^{[t-1]}(i)$ angesetzt werden dürfen. Schreiben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$n^{[t-1]}(k) = n^* - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} n^{[t-1]}(i) \quad ,$$

so wird die Regressionsgleichung (IX.3.) zu

$$n^{[t]}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} n^{[t-1]}(i).p(i,k) + (n^* - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} n^{[t-1]}(i)).p(k,k) + v^{[t]}(k)$$

oder

$$n^{[t]}(k) = n^*.p(k,k) + \sum_{i=1}^{m} \Delta(i,k).n^{[t-1]}(i) + v^{[t]}(k) \qquad \text{(IX.3'.)}$$

mit $\Delta(i,k) := p(i,k) - p(k,k)$ und $k \in \{1,\ldots,m\}$.

Nach der Methode der kleinsten Quadratsumme erhält man nun Schätzwerte $\hat{\Delta}(i,k)$ bzw. $\hat{p}(k,k)$ für die Größen $\Delta(i,k)$ bzw. $p(k,k)$ und damit für alle Übergangswahrscheinlichkeiten, indem man den Ausdruck

$$\sum_{t=1}^{T} \left[\hat{v}^{[t]}(k)\right]^2$$

in bezug auf die $\hat{\Delta}(i,k)$ und in bezug auf $\hat{p}(k,k)$ minimiert unter den m Nebenbedingungen ($i \in \{1,\ldots,m\}$)

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{p}(i,k) = 1$$

(vgl. TELSER [156,S.278]). Dabei ist natürlich $\hat{v}^{[t]}(k)$ nach (IX.3'.)

folgendermaßen definiert:

$$\hat{v}^{[t]}(k) = n^{[t]}(k) - n^{*}.\hat{p}(k,k) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k).n^{[t-1]}(i)$$

Wie im Anhang dieser Arbeit gezeigt wird, ergeben sich auf diese Weise schließlich m^2 Bestimmungsgleichungen für die $\hat{\Delta}(i,k)$ und $\hat{p}(k,k')$, die folgendermaßen lauten: $(k \in \{1,\ldots,m\})$

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k) \left[\sum_{t=1}^{T} (n^{[t-1]}(i) - \bar{n}^{[t-1]}(i))(n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l)) \right] = \sum_{t=1}^{T} (n^{[t]}(k) - \bar{n}^{[t]}(k))(n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l)) \qquad \text{(IX.4a.)}$$

mit $l \in \{1,\ldots,m\}$ und $l \neq k$, sowie

$$\bar{n}^{[t]}(k) = n^{*}.\hat{p}(k,k) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k).\bar{n}^{[t-1]}(i) \qquad \text{(IX.4b.)}$$

Dabei ist allgemein definiert:

$$\bar{n}^{[t]}(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} n^{[t]}(k)$$

Man berechnet also die Werte $\hat{\Delta}(i,k)$ aus (IX.4a.), setzt diese in (IX.4b.) ein und erhält auf diese Weise die gesuchten Werte $\hat{p}(i,k)$.

Ermittelt man Schätzgrößen für Übergangswahrscheinlichkeiten nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, so ist damit natürlich keineswegs von vornherein gesagt, daß die resultierenden Schatzwerte auch nur eine der in der Theorie der Schatzfunktionen (z.B. FISZ [47,S.383-418]) entwickelten wünschenswerten Eigenschaften haben. Es besteht also zunächst kein Grund, diesem Schätzverfahren allzu sehr zu vertrauen. Zudem ist bei dieser Schätzung die Bedingung $0 \leq \hat{p}(i,k) \leq 1$ nicht berücksichtigt worden. Erhält man mittels der Methode der kleinsten Quadratsumme Schatzungen, die nicht in das Intervall $[0,1]$ fallen, so ist deshalb eine entsprechende Korrektur dieser Werte nötig (vgl. TELSER [156,S.279]; GOODMAN [53,S.246]). Natürlich gibt es auch die Möglichkeit, in den Ansatz zur Bestimmung der Schätzwerte diese Bedingung zusätzlich aufzunehmen.

Die Schatzung von Übergangswahrscheinlichkeiten mittels der Methode

der kleinsten Quadratsumme erscheint jedoch in einem wesentlich günstigeren Licht, wenn man untersucht, ob die resultierenden Schätzwerte nicht doch einige der gewünschten Qualitäten aufweisen. Folgende Eigenschaften der hier diskutierten Schätzwerte sind zu verzeichnen:

(1) Die Methode der kleinsten Quadratsumme liefert Schätzwerte für Übergangswahrscheinlichkeiten, die konsistent sind in bezug auf die Anzahl T der betrachteten Perioden (vgl. MANN und WALD [100, S.183 ff.], MADANSKY [99,S.140] und auch TELSER [156,S.278]);

(2) diese Schätzwerte sind auch konsistent in bezug auf die Anzahl n^* der Haushalte, wenn man von einer festen Größe $T > m$ ausgeht (MADANSKY [99,S.138 ff.]);

(3) die Effizienz der Schätzwerte kann verbessert werden, indem man die beobachteten Werte in geeigneter Weise gewichtet (MADANSKY [99,S.138-142] und insbesondere TELSER [156,S.283 ff.]).

9.2. Möglichkeiten der statistischen Prüfung von Modellhypothesen

Die statistischen Methoden zur Prüfung von Modellhypothesen, die Gegenstand dieses Abschnittes sind, beziehen sich ausschließlich auf MARKOVsche Ketten. Auf eine Erörterung analoger Fragen für MARKOVsche Prozesse mit kontinuierlicher Zeitachse wird verzichtet. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen von BILLINGSLEY [10,S.33 ff.] zu diesem Problem.

9.2.1. Prüfung von Hypothesen über spezielle numerische Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir gehen davon aus, daß in irgendwelcher Weise Schätzwerte $\tilde{p}(i,k)$ der m^2 Übergangswahrscheinlichkeiten der MARKOVschen Kette erster Ordnung gefunden wurden, die die Markenwahlprozesse der Haushalte zum Ausdruck bringt. Es sei von vornherein vorausgesetzt, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant und daß die Anfangshäufigkeiten $n^{[0]}(i)$ nicht zufällig sind.

Nimmt man zusätzlich an, daß alle $p(i,k) > 0$ sind, so besteht die Möglichkeit der Prüfung der Hypothese $\tilde{p}(i,k) = p(i,k)$ für alle $i,k \in \{1,\ldots,m\}$, die wir wie üblich als Nullhypothese bezeichnen wol-

len, wenn ein Stichprobenbefund vorliegt (ANDERSON und GOODMAN [3, S.96,97]). Darüberhinaus ist es auch möglich, Hypothesen über einige statt alle Übergangswahrscheinlichkeiten statistisch zu prüfen und Vertrauensbereiche für einige oder alle p(i,k) anzugeben.

Grundlage der Prüfung solcher Hypothesen sind die Untersuchungen von ANDERSON und GOODMAN [3,S.95,96] über das asymptotische Verhalten der maximum-likelihood-Schätzwerte

$$\hat{p}(i,k) = \frac{n(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n(i,l)}$$

(vgl. Abschnitt 9.1.1. S.117) bei steigender Anzahl n^* der untersuchten Haushalte. Es ergab sich, daß

(1) falls i fest ist, die Variablen

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i)} \quad (\hat{p}(i,k) - p(i,k))$$

asymptotisch normalverteilt sind mit Mittelwerten 0 und Kovarianzen, die auf grundsätzlich dieselbe Weise resultieren wie für den Fall der Multinomialverteilung;

(2) diese Variablen für verschiedene i asymptotisch unabhängig sind.

Daher ist bei Gültigkeit der Nullhypothese zunächst die Prüfgröße

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i) \cdot \frac{(\hat{p}(i,k) - \tilde{p}(i,k))^2}{\tilde{p}(i,k)} \qquad \text{(IX.5a.)}$$

asymptotisch χ^2-verteilt mit m-1 Freiheitsgraden. Eine Errechnung dieser Größe ermöglicht die Prüfung von Hypothesen $\tilde{p}(i,1),\ldots,\tilde{p}(i,k),\ldots,\tilde{p}(i,m)$ über die Übergangswahrscheinlichkeiten der i-ten Zeile der Übergangsmatrix.

Will man den χ^2-Test ausdehnen auf alle m^2 Übergangswahrscheinlichkeiten, so setzt man die Prüfgröße

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i) \cdot \frac{(\hat{p}(i,k) - \tilde{p}(i,k))^2}{\tilde{p}(i,k)} \qquad \text{(IX.5b.)}$$

an, die asymptotisch χ^2-verteilt ist mit m(m-1) Freiheitsgraden,

falls die Nullhypothese gilt.

Zur Durchführung solcher χ^2-Teste ist grundsätzlich ein "großer" Stichprobenumfang, also eine große Anzahl von beobachteten Haushalten, nötig. Ein mit bestimmter Sicherheit versehener Vertrauensbereich für die jetzt als unbekannt betrachteten p(i,k) ist gegeben durch die Menge der $\tilde{p}(i,k)$, für die die Prüfgröße (IX.5a.) bzw. (IX.5b.) bei entsprechender Anzahl von Freiheitsgraden den vorgegebenen Sicherheitsgrad nicht überschreitet.

9.2.2. Prüfung der Hypothese, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf konstant sind

Wir nehmen jetzt, anders als im Abschnitt 9.2.1., von vornherein nur an, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich sind und prüfen die Hypothese, daß diese Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf stationär sind. Unsere Nullhypothese lautet jetzt also: $p^{[t]}(i,k) = p(i,k)$ für alle i und k sowie für t = 1,...,T. Es besteht die Möglichkeit, diese Hypothese zunächst durch einen likelihood-ratio-Test zu prüfen. Zur Vereinfachung sei auch hier vorausgesetzt, daß die Anfangsbedingungen nicht zufällig sind.

Trifft die formulierte Nullhypothese zu bzw. nicht zu, dann ist (vgl. Abschnitt 9.1.1., S.117-118)

$$\hat{p}(i,k) = \frac{n(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n(i,l)} \quad \text{bzw.} \quad \hat{p}^{[t]}(i,k) = \frac{n^{[t]}(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n^{[t]}(i,l)}$$

eine maximum-likelihood-Schätzung für p(i,k) bzw. $p^{[t]}(i,k)$.

Bei Gültigkeit der Nullhypothese ist die zu maximierende Likelihood-Funktion

$$\Lambda_o = \prod_{i,k=1}^{m} (\hat{p}(i,k))^{n(i,k)} = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,k=1}^{m} (\hat{p}(i,k))^{n^{[t]}(i,k)}$$

Trifft dagegen die Hypothese zu, die $p^{[t]}(i,k)$ seien nicht konstant im Zeitablauf, so ist die Likelihood-Funktion

$$\Lambda_1 = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,k=1}^{m} (\hat{p}^{[t]}(i,k))^{n^{[t]}(i,k)}$$

zu maximieren.

Die Größe $-2 \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1}$ mit

$$\frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,k=1}^{m} \left[\frac{\hat{p}(i,k)}{\hat{p}^{[t]}(i,k)} \right]^{n^{[t]}(i,k)} \qquad \text{(IX.6.}$$

ist nun (vgl. ANDERSON und GOODMAN [3,S.98]) χ^2-verteilt mit $(T-1)(m-1)m$ Freiheitsgraden, wenn die Nullhypothese gültig ist.

Alternativ zu diesem Test läßt sich zur Prüfung der Stationarität einer MARKOVschen Kette auch ein traditioneller χ^2-Test durchführen.

Geht man zunächst von einem festen i aus und will man die Hypothese prüfen, daß die m Übergangswahrscheinlichkeiten $p^{[t]}(i,1), \ldots, p^{[t]}(i,k), \ldots, p^{[t]}(i,m)$ im Zeitablauf invariant sind, dann kann man zur Prüfung der Nullhypothese eine Kontingenztabelle im üblichen Sinn aufstellen (vgl. ANDERSON und GOODMAN [3,S.98 und insbesondere S.106-109]). Sie sieht in diesem Falle folgendermaßen aus:

t \ k	1	2	3	...	m
1	$\hat{p}^{[1]}(i,1)$	$\hat{p}^{[1]}(i,2)$	$\hat{p}^{[1]}(i,3)$	...	$\hat{p}^{[1]}(i,m)$
2	$\hat{p}^{[2]}(i,1)$	$\hat{p}^{[2]}(i,2)$	$\hat{p}^{[2]}(i,3)$	...	$\hat{p}^{[2]}(i,m)$
3	$\hat{p}^{[3]}(i,1)$	...		...	
⋮	⋮				⋮
T	$\hat{p}^{[T]}(i,1)$	...			$\hat{p}^{[T]}(i,m)$

Geprüft wird die Hypothese, die besagt, daß die Zufallsvariablen $\hat{p}^{[t]}(i,k)$ für alle t, also für alle Zeilen der Kontingenztabelle, dieselbe Verteilung haben, also in bezug auf t homogen sind. Man setzt demnach die Testgröße

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i) \cdot \frac{(\hat{p}^{[t]}(i,k) - \hat{p}(i,k))^2}{\hat{p}(i,k)} \qquad \text{(IX.7a.)}$$

an, die bei Gültigkeit der Nullhypothese asymptotisch χ^2-verteilt ist mit (m-1)(T-1) Freiheitsgraden.

Berücksichtigt man, daß die Zufallsvariablen $\hat{p}^{[t]}(i,k)$ bzw. $\hat{p}(i,k)$ für verschiedene i asymptotisch unabhängig sind (vgl. ANDERSON und GOODMAN [3,S.96]), so läßt sich dieser traditionelle χ^2-Test erweitern, indem man von der Testgröße

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i) \cdot \frac{(\hat{p}^{[t]}(i,k) - \hat{p}(i,k))^2}{\hat{p}(i,k)} \qquad \text{(IX.7b.)}$$

ausgeht, die χ^2-verteilt ist mit m(m-1)(T-1) Freiheitsgraden, falls die Nullhypothese gilt.

Bemerkenswert ist, daß der likelihood-ratio-Test nach (IX.6.) und die zuletzt entwickelten χ^2-Teste zur Stationarität der MARKOVschen Kette in einem gewissen Sinn asymptotisch äquivalent sind (ANDERSON und GOODMAN [3,S.106-109]), ein Gesichtspunkt, der hier allerdings nicht weiter verfolgt werden kann.

9.2.3. Prüfung der Hypothese, daß die MARKOVsche Kette von einer bestimmten vorgegebenen Ordnung ist

Wir gehen jetzt wieder davon aus, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant sind und wollen auf Grund von Stichprobenbefunden eine Hypothese über die Ordnung der dem Markenwahlverhalten der Haushalte zugrundeliegenden MARKOVschen Kette testen. Unsere Nullhypothese bestehe hier speziell darin, daß die MARKOVsche Kette erster Ordnung sei; alternativ zu dieser Nullhypothese nehmen wir an, daß eine MARKOVsche Kette zweiter Ordnung vorliegt. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit des Überganges von der Marke K_i zur Marke K_k und dann zur Marke K_l mit p(i,k,l), so entspricht es der Nullhypothese, wenn gilt:

$$p(1,k,l) = p(2,k,l) = \ldots = p(m,k,l) = p(k,l)$$

Wir bezeichnen weiter mit $n^{[t]}(i,k,l)$ die Anzahl der Haushalte in der Stichprobe, die sich zu den Zeitpunkten t-2 bzw. t-1 bzw. t in den Zuständen K_i, K_k und K_l befinden und nehmen jetzt anders als früher nicht nur die Anfangshäufigkeiten, sondern auch die Übergangshäufigkeiten $n^{[1]}(i,k)$ als nicht zufällig an.

Verallgemeinert man die Gedankengänge des Abschnitts 9.1.1. (S.115 ff.), so erkennt man leicht, daß für eine stationäre MARKOVsche Kette zweiter Ordnung die Größe

$$\hat{p}(i,k,l) = \frac{n(i,k,l)}{\sum_{l}^{m} n(i,k,l)} = \frac{\sum_{t=2}^{T} n^{[t]}(i,k,l)}{\sum_{t=2}^{T} n^{[t-1]}(i,k)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für p(i,k,l) ist (ANDERSON und GOODMAN [3,S.100]). Wir wissen nach Satz 2 S.117 bereits, daß

$$\hat{p}(k,l) = \frac{\sum_{t=2}^{T} n^{[t]}(k,l)}{\sum_{t=2}^{T} n^{[t-1]}(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n(i,k,l)}{\sum_{i}\sum_{l} n(i,k,l)}$$

eine maximum-likelihood-Schätzung für die Übergangswahrscheinlichkeit p(k,l) einer MARKOVschen Kette erster Ordnung ist. Man beachte, daß hier die Summation über t anders als früher erst bei t=2 beginnt.

Bei Gültigkeit der Nullhypothese ist hier die zu maximierende Likelihood-Funktion

$$\Lambda_0 = \prod_{k,l} (\hat{p}(k,l))^{n(k,l)} = \prod_{i,k,l} (\hat{p}(k,l))^{n(i,k,l)} \quad ;$$

trifft die Nullhypothese nicht zu, so ist von der Likelihood-Funktion

$$\Lambda_1 = \prod_{i,k,l} \hat{p}(i,k,l)^{n(i,k,l)}$$

auszugehen.

Die Testgröße $-2 \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1}$ mit

$$\frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} = \prod_{i,k,l} \left[\frac{\hat{p}(k,l)}{\hat{p}(i,k,l)}\right]^{n(i,k,l)} \qquad \text{(IX.8.)}$$

ist bei Gültigkeit der Nullhypothese wiederum χ^2-verteilt, und zwar mit m(m-1)(m-1) Freiheitsgraden (ANDERSON und GOODMAN [3,S.100]).

Der hier beschriebene likelihood-ratio-Test ist natürlich in analoger

Weise durchführbar zur Prüfung der Hypothese, das Markenwahlverhalten der Haushalte sei darzustellen durch ein Unabhängigkeitsmodell statt durch eine MARKOVsche Kette erster Ordnung. Auch eine Generalisierung des Tests für eine MARKOVsche Kette allgemeiner Ordnung ist ohne weiteres möglich. Man vergleiche hierzu die Ausführungen bei ANDERSON und GOODMAN [3,S.101-102].

9.2.4. Einige abschließende Gesichtspunkte zur Hypothesenprüfung bei MARKOV-Modellen zur Markenwahl

Der Hinweis erscheint zum Schluß des Abschnitts 9.2. angebracht, daß neben den in 9.2.1., 9.2.2. und 9.2.3. entwickelten Testen weitere ähnlich konstruierte likelihood-ratio-Teste oder Standard-χ^2-Teste durchgeführt werden können. Beispielsweise wird bei ANDERSON und GOODMAN [3,S.103] unter anderem gezeigt, wie man die Hypothese prüfen kann, daß mehrere Stichproben aus derselben MARKOVschen Kette vorgegebener Ordnung stammen. Es bestehen insgesamt gesehen also mannigfache Möglichkeiten, Hypothesen, die in die MARKOV-Modelle zur Markenwahl eingehen, statistisch abzusichern.

Die hier gezeigten Teste beziehen sich auf Beobachtungen mehrerer Haushalte während einer Periode, die T Markenwahlvorgänge umfaßt. Die asymptotischen Ergebnisse gelten für $n^{[0]}(i) \to \infty$ und damit $n^* \to \infty$ bei festem T, also für große Anzahlen von Haushalten. Der Fall, daß viele sukzessive Beobachtungen eines einzigen Elementes vorliegen, also Befunde über nur eine Kette großer Länge vorhanden sind, erfordert eine etwas andere theoretische Behandlung (vgl. hierzu BILLINGSLEY [10], HOEL [74] und ANDERSON und GOODMAN [3,S.105 ff.]). Er ist für MARKOV-Modelle zur Gütermarkenwahl nicht von großer Bedeutung, da die Durchführung zeitlich ausgedehnter empirischer Beobachtungen der Markenwahlvorgänge von Haushalten zum Zweck der Schätzung von Übergangswahrscheinlichkeiten aus offensichtlichen Gründen unzweckmäßig ist.

Einschränkend muß schließlich darauf hingewiesen werden, daß alle im Abschnitt 9.2. dargestellten Teste auf maximum-likelihood-Schätzwerten für Übergangswahrscheinlichkeiten basieren, die, wie wir gesehen haben, aus organisatorisch-technischen Gründen nicht leicht zu gewinnen sind. Trotz der vielfältigen theoretischen Möglichkeiten der Prü-

fung von Modellhypothesen muß daher mit wesentlichen erhebungspraktischen Einzelproblemen gerechnet werden.

§ 10 Kritische Beurteilung einiger empirisch ausgerichteter Arbeiten zur Prognose von Marktanteilen

Im Verlauf dieses Paragraphen werden zunächst einige Abhandlungen diskutiert, in denen konkrete Anwendungen der bisher in dieser Arbeit besprochenen Modelle beschrieben wurden. Beispiele dieser Art zur Prognose von Marktanteilen sind bis heute recht selten, was schon darauf hindeutet, daß bei der Durchrechnung solcher Modelle praktische Schwierigkeiten auftreten.

Des weiteren kommen im zweiten Abschnitt kurz einige empirische Befunde aus dem Bereich der Marktforschung zur Sprache, die geeignet sind, zusätzliche Einblicke in das Verhalten der Haushalte bei der Markenwahl angesichts verschiedener konkurrierender Marken zu geben. Ihre Auswertung ist neben Plausibilitätsüberlegungen von Bedeutung für eine Beurteilung des Realitätsgehaltes der Modellannahmen, die MARKOV-Modellen zur Prognose von Marktanteilen gewöhnlich zugrundeliegen.

10.1. Praktische Beispiele zur Prognose von Marktanteilen

10.1.1. Marktanteilsprognosen mittels MARKOVscher Prozesse bei HARDER

In der Monographie von HARDER über mathematische Modelle in der Marktforschung [63] werden verschiedene Aspekte des Prognoseproblems für Marktanteile bei Verwendung von MARKOV-Modellen beleuchtet, wobei allerdings nicht ersichtlich ist, ob die Zahlenwerte, mit denen HARDER operiert, real oder fingiert sind. Eine kritische Würdigung dieser auf Anwendung ausgerichteten Modelldarstellung ergibt sich auf einfache Weise, indem man die von HARDER eingeführten Hypothesen auf ihre Realitätsnähe überprüft.

Zunächst ist bemerkenswert, daß zwar kommentarlos von einer MARKOVschen Kette erster Ordnung (Grundannahme 5.1.1. S.48-49) ausgegangen wird, die Möglichkeiten der Verwendung eines MARKOV-Modells mit ste-

tiger Zeitachse daneben aber ausführlich zur Sprache kommen (S.92-94). Eine Begründung, weswegen ein dergestalt abgewandeltes Modell der Realität mehr gerecht wird, fehlt jedoch. Auch wird den Modellannahmen, die früher in dieser Arbeit als akzessorische Annahmen bezeichnet wurden, keine Aufmerksamkeit geschenkt. Vielmehr wird offenbar von vornherein davon ausgegangen, daß die sehr restriktiven akzessorischen Annahmen 5.1.2.1. bis 5.1.2.4. (S.50-51) gültig sind. Eine Erörterung dieser Fragen ist jedoch insbesondere in einer anwendungsorientierten Arbeit sehr vonnöten. Insbesondere werden die Übergangs- und absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten der zugrundeliegenden MARKOVschen Kette als Bevölkerungsanteile interpretiert. Dies läßt zwei alternative Schlußfolgerungen zu. Entweder wird angenommen, daß die individuellen Übergangsmatrizen von vornherein als gleich angenommen werden, eine Hypothese, die, wie schon gezeigt wurde (vgl. S.75), recht unplausibel ist. Oder es liegt eine Art makroökonomische statt mikroökonomische Deutung der Markenwahlprozesse in der Volkswirtschaft zugrunde, wie sie beispielsweise bei EHRENBERG [32,S.361-362] vertreten und dort als nichtstochastische Interpretation bezeichnet wird. Eine solche Deutung läuft darauf hinaus, daß man annimmt, die Marktanteile der einzelnen Marken für aufeinanderfolgende Perioden folgten als solche dem Schema einer MARKOVschen Kette erster Ordnung. Sie ist insofern verwandt mit der im Abschnitt 2.4.2. S.26 erwähnten deskriptiv-statistischen Interpretation kollektiver Nachfragefunktionen im Rahmen der traditionellen Nachfragetheorie mit Nachfragefunktion. Vorläufig fehlt allerdings jeglicher Grund dafür, anzunehmen, daß sich die Haushalte einer ganzen Volkswirtschaft kollektiv nach einem lerntheoretischen Schema verhalten.

Das Problem der Verfälschung von Prognoseergebnissen durch Aggregation von Gütermarken kommt hingegen bei HARDER (S.97) eingehend zur Sprache. Es wird an Hand eines Zahlenbeispiels nachgewiesen, daß die Reduktion der Zustandsmenge einer MARKOVschen Kette auf zwei Elemente nur eine Näherungslösung liefert. Allerdings bestehen wenig Aussichten, den dadurch entstehenden Fehler, wie HARDER fordert, in seinen Auswirkungen zu verfolgen. Denn dazu ist die Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeiten für nicht aggregierte Zustände nötig, die in aller Regel bei praktischen Untersuchungen fehlt (vgl. Abschnitt 5.4. S.71).

Zwei wesentliche Gesichtspunkte, die von HARDER diskutiert werden, seien abschließend vermerkt:

(1) Marktanteilsprognosen mittels MARKOVscher Ketten sind sehr empfindlich gegenüber Schwankungen der Übergangswahrscheinlichkeiten. Daraus ist zu folgern, daß der Schätzung dieser Übergangswahrscheinlichkeiten besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden muß. Leider fehlen bei HARDER Hinweise darauf, wie man gute Schätzwerte für Übergangswahrscheinlichkeiten praktisch finden kann. Auch die Möglichkeiten der statistischen Prüfung von Modellhypothesen kommen nicht zur Sprache.

(2) Nach HARDER ist auf vielen Märkten der durch konstant bleibende Marktanteile gekennzeichnete stationäre Endzustand gegeben, weil die Einführung neuer Marken - ein Problem, das in dieser Arbeit bisher ausgeklammert wurde - nicht häufig ist. Deshalb liegt nach HARDER die Bedeutung von MARKOV-Modellen zur Untersuchung oligopolistisch strukturierter Gütermärkte mehr in der Betrachtung von Möglichkeiten der Beeinflussung dieser Übergangswahrscheinlichkeiten seitens der Anbieter als in den Möglichkeiten der Marktanteilsprognose.

10.1.2. Eine Untersuchung des englichen Waschmittelmarktes von STYAN und SMITH

In diesem Aufsatz [151] werden zunächst vier Verbrauchszustände von Haushalten wie folgt definiert:

Zustand 1 liegt vor, wenn ein Haushalt im Verlauf einer Woche nur Detergentien[1)] kauft;

Zustand 2 ist gegeben, wenn ein Haushalt im Verlauf einer Woche nur Seifenpulver[1)] kauft;

Zustand 3 besteht darin, daß im Verlauf einer Woche sowohl Detergentien als auch Seifenpulver gekauft werden;

Zustand 4 liegt vor, wenn in einer Woche überhaupt kein Waschmittel gekauft wurde.

[1)] Waschmittel allgemein (laundry powders) werden auf Grund verschiedener chemisch-technischer Eigenschaften eingeteilt in die Gruppen der Detergentien (detergents) und der Seifenpulver (soap powders).

Diese Gruppierung von Zuständen hat sicherlich nicht viel mit Markenwahl zu tun. Nur wenn neben Zustand 1 und Zustand 2 keine weiteren Zustände definiert wären, könnte man vermuten, daß, falls Seifenpulver und Detergentien ausschließlich in Form von Markenartikeln angeboten werden, zwei Aggregatmarken gebildet worden sind. Schon die Zusammenfassung von Marken zu Aggregatmarken ist, wie gezeigt wurde, nicht unproblematisch. Durch die Hereinnahme der Zustände 3 und insbesondere 4 scheint eine saubere lerntheoretische Begründung des Modells, wie sie im Paragraphen 5 dieser Arbeit entwickelt wurde, vollends aufgegeben worden zu sein. Vor allem ist völlig uneinsichtig, daß der Nichtverbrauch von Waschmitteln (Zustand 4) in grundsätzlich gleicher Weise Lernvorgänge bei den Haushalten bewirken soll wie der Verbrauch einer Marke oder Markengruppe. Man beachte außerdem, daß hier nicht die einzelnen Wahlakte der Haushalte zur Definition von Zuständen herangezogen werden, sondern alle Käufe innerhalb einer Woche, im allgemeinen also wohl eine Aufeinanderfolge mehrerer Wahlvorgänge.

Trotz dieser Einwendungen grundsätzlicher Natur hat die zur Diskussion stehende Untersuchung einiges für sich. Denn die Übergangswahrscheinlichkeiten wurden auf offensichtlich sehr sorgfältige Weise aus den Aufzeichnungen eines - allerdings nicht zufällig ausgewählten - ständigen Berichterkreises geschätzt. Außerdem wurden vor der Durchrechnung des Modells zwei wesentliche Modellhypothesen statistisch getestet. Bezüglich der Ordnung der zugrundegelegten MARKOVschen Kette wurde die Hypothese geprüft, ob eine Folge unabhängiger Wahlvorgänge, also das Unabhängigkeitsmodell des Paragraphen 4, vorliegt (vgl. Abschnitt 9.2.3. S.128-129). Diese Hypothese mußte verworfen werden. Weiter wurde ein Test durchgeführt zur Prüfung der Konstanz der - für alle Haushalte als gleich vorausgesetzten - Übergangsmatrix im Zeitverlauf (vgl. Abschnitt 9.2.2. S.125 ff.). Die Nullhypothese der Stationarität der Übergangsmatrix brauchte auf Grund der Panel-Ergebnisse nicht abgelehnt zu werden.

10.1.3. Eine Untersuchung von TELSER über die Märkte einiger kurzlebiger Konsumgüter in den USA

Diese TELSERsche Untersuchung [155, insbesondere S.313-324] bezieht sich auf die Märkte für tiefgekühltes Orangensaftkonzentrat (frozen

orange juice concentrate), für Pulverkaffee (instant coffee), gewöhnlichen Kaffee (regular coffee) und Margarine.

Die verwendeten Daten entstammen dem Haushaltspanel der Market Research Corporation of America und wurden in dem Zeitabschnitt von April 1954 bis März 1957 ermittelt. Hierbei handelt es sich natürlich wiederum keineswegs um eine Zufallsauswahl von Haushalten, weil, wie schon festgestellt wurde (vgl. Abschnitt 9.1.1. S.119-120), es an den organisatorischen Möglichkeiten fehlt, ein echtes Zufallspanel einzurichten. Vielmehr sind, wie TELSER selbst [155,S.314] einschränkend bemerkt, sogar wesentliche strukturelle Unterschiede zu verzeichnen zwischen dem herangezogenen Berichterkreis und der allgemeinen Struktur der Bevölkerung der Vereinigten Staaten, wie sie sich aus Volkszählungen ergibt. Man kann deshalb nicht bedenkenlos darauf vertrauen, daß die von TELSER verwendeten Panelergebnisse unverzerrt sind.

Zu diesem ersten Einwand gegen die Ermittlung der Ausgangsdaten kommen weitere Gesichtspunkte, die sich auf die Definition der Verbrauchszustände beziehen. Zunächst ist bemerkenswert, daß als Zeiteinheit ein Monat gewählt wurde, obwohl damit sicherlich eine korrekte Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten unter sorgfältiger Beachtung der einzelnen Markenübergänge bei den Haushalten unmöglich ist. Die Untersuchung wurde des weiteren eingeschränkt auf überall verfügbare Marken, obwohl es vermutlich auf allen vier untersuchten Märkten auch andere Marken gibt, die nur regional angeboten werden, deren regionaler Marktanteil aber nicht vernachlässigbar klein ist. Für die Betrachtung des Margarinemarktes wurde diesem Problem dadurch Rechnung getragen, daß für fünf Regionen getrennte Untersuchungen durchgeführt wurden. Schließlich muß die schon früher (vgl. § 3,S.30) kurz angeschnittene Frage gestellt werden, auf welche Weise die untersuchten Wirtschaftsgüter zu definieren und gegen verwandte Produkte abzugrenzen sind. Es erscheint zumindest nicht selbstverständlich, daß Pulverkaffee und gewöhnlicher Kaffee als zwei verschiedene Wirtschaftsgüter aufgefaßt werden. Eine Zusammenfassung beider Markengruppen zu einem Wirtschaftsgut Kaffee liegt vielmehr mindestens genau so nahe.

Kritisch anzumerken ist außerdem, daß im wesentlichen für die zur Diskussion stehende Arbeit wiederum kommentarlos und ohne jede Absi-

cherung durch statistische Testverfahren die restriktiven Modellannahmen vorausgesetzt wurden, die im Abschnitt 5.1. (S.48 ff.) angegeben sind. Eine Ausnahme macht hier nur die Annahme 5.1.2.4. (S.51), also die Annahme der Konstanz des Markenwahlschemas im Zeitverlauf. Denn die TELSERschen Untersuchungen konzentrieren sich weniger auf Marktanteilsprognosen als auf eine statistische Schätzung der kurzfristigen und langfristigen Elastizitäten der Marktanteile in bezug auf die Markenpreise (vgl. Abschnitt 5.5.4. S.85 ff.).

Für alle vier untersuchten Märkte ergab sich, daß die langfristigen Elastizitäten des Marktanteils in bezug auf den Preis der betrachteten Marke sehr hoch sind. Dies ist ein Indiz für die starke Konkurrenzbeziehung zwischen den einzelnen Marken, aber auch für die Bedeutung des Instrumentes der Preispolitik für die Anbieter von Markenartikeln, die sich von Konkurrenzprodukten qualitativ nicht sehr abheben. Außerdem folgt aus diesem Befund, daß auf Marktanteilsprognosen auf der Basis von MARKOVschen Ketten mit stationären Übergangsmatrizen kein großer Verlaß ist, wenn sie sich auf Perioden preispolitischer Aktivität der Anbieter beziehen.

10.1.4. Die empirischen Untersuchungen von HARARY und LIPSTEIN

Wie die übrigen bereits besprochenen Arbeiten enthält die Untersuchung von HARARY und LIPSTEIN [62] keine kritischen Bemerkungen darüber, ob die mehr oder weniger stillschweigend vorausgesetzten restriktiven Modellannahmen gerechtfertigt sind. Auch sind bei den Zustandsdefinitionen, die von HARARY und LIPSTEIN vorgenommen wurden, die üblichen Einwendungen zu machen, weil nicht nur Aggregatmarken vorkommen, sondern auch mit meist beträchtlichen Übergangswahrscheinlichkeiten versehene Zustände angesetzt werden, die durch den Verbrauch überhaupt keiner Marke gekennzeichnet sind [62,S.31-32].

Einige wesentliche neue Gesichtspunkte verdienen jedoch Beachtung. Die Konsumenten eines Wirtschaftsgutes werden in zwei Schichten aufgeteilt, und zwar umfaßt die erste Schicht (hard core component) alle die Haushalte, die innerhalb einer Betrachtungsperiode 75 % oder mehr ihres Gesamtbedarfes an einem Wirtschaftsgut bei einer einzigen Marke decken. Die zweite Schicht (switcher component) enthält die anderen Haushalte, also die Haushalte, die keine großen Präferenzen für eine

spezielle Marke entwickelt haben. Diese Unterscheidung von Haushaltstypen ist nach HARARY und LIPSTEIN deshalb von beträchtlicher Bedeutung für die Absatzpolitik der Unternehmung, weil die Haushalte der ersten Schicht gegen absatzpolitische Avancen der Anbieter relativ unempfindlich sind und vor allem die Haushalte der zweiten Schicht beeinflußt werden müssen. Je größer die erste Schicht ist, umso weniger ist der Marktanteil einer Marke durch absatzpolitische Maßnahmen manipulierbar.

Prognostisch relevant für die Beurteilung der Entwicklung von Marktanteilen sind nach HARARY und LIPSTEIN [62,S.33] die Begriffe

(1) der abgeschlossenen Zustandsmenge,
(2) des Absorptionszustandes,
(3) des transienten Zustandes,

die früher in dieser Arbeit definiert wurden (vgl. Abschnitt 5.2.3. S.57-59). Natürlich sind abgeschlossene Zustandsmengen, Absorptions- und transiente Zustände auf Grund empirischer Ergebnisse nicht exakt, sondern nur angenähert abgrenzbar, dann nämlich, wenn man sehr geringe Übergangswahrscheinlichkeiten mit Null ansetzt.

Ist eine Zustandsmenge als wenigstens annähernd abgeschlossen erkannt, so besteht wegen eines im Abschnitt 5.2.3. (S.60) formulierten Theorems die Möglichkeit, die ihr entsprechende Markengruppe für sich allein zu betrachten. Von absatzpolitischem Interesse für die beteiligten Unternehmungen ist die Frage, weswegen ein Haushalt seine Markenwahl auf eine solche abgeschlossene Gruppe von Marken beschränkt, außerdem, welcher Mittel es bedarf, um einen Haushalt dazu zu bewegen, eine solche abgeschlossene Zustandsmenge zu verlassen oder beizubehalten (vgl. HARARY und LIPSTEIN [62,S.33]).

Liegt eine Marke vor, die einem Absorptionszustand ungefähr entspricht, dann wird als mittlere Absorptionszeit der Erwartungswert der Anzahl der Perioden definiert, die von dieser Marke benötigt werden, bis sie den Marktanteil 1 erreicht hat. Ist die mittlere Absorptionszeit groß, dann heißt das, daß die betrachtete Marke zwar auf lange Frist sehr erfolgreich ist, daß es aber einer längeren Zeitspanne bedarf, bis sie sich durchgesetzt hat. Für die Beurteilung des Erfolges einer neu eingeführten Marke, die sich qualitativ oder preislich von konkurrierenden Marken abhebt, ist eine Information

über diese mittlere Absorptionszeit wesentlich.

Marken, die einem transienten Zustand entsprechen, sind nach HARARY und LIPSTEIN durch hohe Wahrscheinlichkeiten des Überganges zu anderen Marken gekennzeichnet, eine Charakterisierung, die allerdings mathematisch nicht ganz einwandfrei ist. Hat man eine Marke als angenähert transient erkannt, so sind daraus für ihren Produzenten Schlüsse zu ziehen bezüglich der Entwicklung des Marktanteils dieser Marke, aber auch in bezug auf eine Verbesserung der Position dieser Marke durch absatzpolitische Maßnahmen, insbesondere durch Qualitätsvariation.

10.2. Einige empirische Befunde aus der Marktforschung, die für die Beurteilung von Markenwahlvorgängen von Bedeutung sind

In einer Arbeit von STAFFORD [146] wird die Frage untersucht, ob bei Markenwahlprozessen von Haushalten Gruppeneinflüsse eine Rolle spielen, das heißt, ob auch bei Markenwahlvorgängen so etwas wie ein DUESENBERRY-Effekt (vgl. Abschnitt 1.2.1. S.13) verzeichnet werden muß. Die soziologisch ausgerichteten Untersuchungen STAFFORDs, die sich auf kleine informale Gruppen von Hausfrauen bezogen, haben ergeben, daß dies tatsächlich in beträchtlichem Maße der Fall ist; und zwar sind die Einflüsse einer solchen sozialen Gruppe auf die Markenwahl und insbesondere auf die Bevorzugung einer Marke umso dominierender, je geschlossener die Gruppe ist und je stärker sich ein Mitglied zu einer Art Anführer der Gruppe entwickelt hat. Daraus folgt, daß die Annahme interindividueller stochastischer Unabhängigkeit der Markenwahlvorgänge, die bisher ohne ausdrückliche Erwähnung dieser Arbeit zugrundegelegt wurde, nicht problemfrei ist. Inwieweit Möglichkeiten bestehen, von einer solchen Modellannahme abzugehen, soll indessen hier nicht untersucht werden.

Die Frage, ob die - jetzt in einem ganz landläufigen Sinn verstandene - Markentreue ein und desselben Haushaltes bei verschiedenen Wirtschaftsgütern im wesentlichen gleich ist, mit anderen Worten also die Frage, ob Markentreue an sich als konstitutionelles Merkmal eines Haushaltes gelten muß, wird von FARLEY [37] behandelt. Es ergab sich, daß Markentreue keineswegs ein für Haushalte spezifisches Merkmal ist, daß vielmehr ein Haushalt bei verschiedenen Gütern ein durchaus un-

terschiedliches Wahlverhalten an den Tag legt. Je mehr Marken ein Wirtschaftsgut umfaßt, umso seltener wird eine einzelne Marke von einem Haushalt bevorzugt. Auch ist bei Verbrauchsgütern, die sehr oft gekauft werden und für die allgemein viel Geld ausgegeben wird, nach FARLEY die Markentreue geringer als bei anderen Gütern. Schließlich spielt noch eine Rolle, in welchem Maße von der Angebotsseite her aktive Absatzpolitik, insbesondere Preispolitik, betrieben wird. Aspekte, die der Angebotsseite des Marktes entstammen, beeinflussen also in starkem Ausmaß die Loyalität der Haushalte gegenüber einer Marke.

Eine weitere ergiebige Quelle für empirische Befunde solcher Art ist die bereits mehrfach erwähnte Arbeit von KUEHN [91, insbesondere S. 33-78]. In ihr wird unter anderem die Frage erörtert, inwieweit Zusammenhänge bestehen zwischen der Markentreue eines Haushaltes und der Tendenz der Haushalte, sukzessive Käufe beim gleichen Einzelhändler oder in verschiedenen Geschäften zu tätigen. Die empirischen Untersuchungen KUEHNs [91,S.67 ff.], die sich auf gefrorenes Orangensaftkonzentrat beziehen, lassen vermuten, daß ein enger Zusammenhang zwischen Markenwahlverhalten und Wahl des Einzelhandelgeschäftes besteht, in dem der Kauf getätigt wird. Erfolgen zwei sukzessive Käufe in ein und demselben Warenhaus, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zweimal dieselbe Marke gewählt wird, wesentlich größer als wenn in zwei verschiedenen Einzelhandelsgeschäften gekauft wird.

10.3. Kurze Zusammenfassung

Der knappe Überblick in 10.2. über einige empirische Untersuchungen zur Markenwahl der Haushalte aus dem Bereich der praktischen Marktforschung hat gezeigt, daß vielfältige interessante Beziehungen und Abhängigkeiten im Zusammenhang mit Markenwahlvorgängen nachgewiesen werden können. Einige oder gar alle diese Gesichtspunkte in einem lerntheoretischen Modell der Markenwahl zu berücksichtigen ist jedoch weder möglich noch, und zwar wegen des grundsätzlich stochastischen Charakters solcher Modelle, nötig (vgl. § 3,S.30).

Nötig ist allerdings, wie aus den Berichten über verschiedene empirische Arbeiten zur Verwendung von lerntheoretischen Modellen zur Markenwahl in 10.1. eindeutig hervorgeht, daß man sich bei der Durchführung solcher Untersuchungen erhöhter Sorgfalt befleißigt, die sich vor allem auf folgende Gesichtspunkte bezieht:

(1) Wird die Schätzung von Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Aufzeichnungen eines ständigen Berichterkreises vorgenommen, so muß dieser Berichterkreis möglichst repräsentativ im Sinne der Stichprobentheorie sein.

(2) Die Definition von Verbrauchszuständen darf nicht willkürlich und ohne Beachtung des lerntheoretischen Grundgedankens der entwikkelten Modelle erfolgen. Sie sollte an möglichen Ergebnissen konkreter individueller Wahlakte orientiert sein. Auf die Definition von Aggregatmarken und auch von Hilfszuständen, die durch den Nichtverbrauch eines bestimmten Wirtschaftsgutes gekennzeichnet sind, sollte man verzichten.

(3) Die eingeführten akzessorischen Annahmen müssen sauber gekennzeichnet und auf ihren Realitätsgehalt untersucht werden.

(4) So weit es möglich ist, müssen die Modellannahmen durch statistische Testverfahren abgesichert werden.

KAPITEL 5: ABSCHLIESSENDE WIRTSCHAFTSTHEORETISCHE BEURTEILUNG

§ 11 Erneute Gegenüberstellung lerntheoretischer Modelle zur Markenwahl und traditioneller Verbrauchstheorie

Im Kapitel 1 dieser Arbeit wurden bereits vorab einige Eigenschaften lerntheoretischer Modelle zur Gütermarkenwahl registriert, die vom wirtschaftstheoretischen Standpunkt aus wünschenswert sind (S.30). Unter anderem wurde darauf hingewiesen, daß diese Modelle stochastisch sind und von der dynamischen Betrachtungsweise ausgehen, außerdem, daß für solche Modelle das Konzept einer individuellen Nachfragefunktion, das sich als fragwürdig erwiesen hat (vgl. Abschnitt 2.4.1. S.24-25), entbehrlich ist.

Es soll jetzt, nachdem diese Ansätze beschrieben wurden, ganz kurz untersucht werden, inwieweit lerntheoretische Modelle zur Gütermarkenwahl die traditionelle Verbrauchstheorie zu ergänzen in der Lage sind, und wie es bei diesen Modellen mit den Problemen steht, die im Paragraphen 2 zur traditionellen Verbrauchstheorie entwickelt wurden.

11.1. Nochmals zu den Determinanten der Wahlakte der Konsumeinheiten

Im Verlauf des Abschnitts 2.1. (S.15-18) hatten wir festgestellt, daß keine Aussichten bestehen, die Motive, die die Wahlentscheidungen der Haushalte bewirken, vollständig zu erfassen, zu metrisieren und als unabhängige Variablen in die Formulierung individueller Nachfragefunktionen einzubeziehen. Natürlich vermögen lerntheoretische Modelle zur Markenwahl mangels Zuständigkeit diese Schwierigkeit nicht auszuräumen für die erste Entscheidungsstufe der Haushalte, also die Entscheidung zwischen verschiedenen als Menge von Marken konzipierten Wirtschaftsgütern. Anders ist es jedoch bei den Wahlakten für verschiedene Marken, die zu einem Wirtschaftsgut gehören.

Wir haben gesehen, daß

(1) es wegen des stochastischen Charakters der lerntheoretischen Modelle zur Markenwahl nicht erforderlich ist, die Motivationen der

Haushalte bei der Markenwahl vollständig zu berücksichtigen (vgl. S. 30);

(2) andererseits aber Möglichkeiten bestehen, die Übergangswahrscheinlichkeiten als Funktionen von Variablen wie Markenpreisen oder Werbemaßnahmen der konkurrierenden Anbieter (vgl. Abschnitte 5.5.4. S.85-88; 6.2. S.93-96; 6.3. S.96-99) anzusetzen.

Es stellt sich hier die Frage, welche von allen möglichen Motivationen bei den Markenwahlakten der Haushalte denn explizit als unabhängige Variablen, die vermöge einer Funktion mit den Übergangswahrscheinlichkeiten verknüpft sind, erfaßt werden sollen, und welche dieser Berücksichtigung nicht bedürfen. Ihre Beantwortung ist nicht einfach. Ist man geneigt, die Übergangswahrscheinlichkeiten als Funktion von möglichst vielen Variablen aufzufassen, so kommt man mit der Markenwahl in dieselben Schwierigkeiten, die für die Güterwahl im Abschnitt 2.1. (S.15-18) aufgezeigt wurden. Die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Markenwahlmodelle ginge damit weitgehend verloren. Für Marktanteilsvorhersagen würde die Bedeutung dieser Modelle ebenfalls stark reduziert, weil die Elemente der Übergangsmatrix im Zeitablauf nach Maßgabe der Größen variieren, von denen die Übergangswahrscheinlichkeiten funktional abhängig sind. Das Verhalten solcher Variablen im Zeitablauf im voraus zu kontrollieren ist jedoch in aller Regel nicht möglich.

Daher sollten die Übergangswahrscheinlichkeiten grundsätzlich als Funktionen möglichst weniger Variablen angesetzt werden, etwa der Markenpreise für einen Zeitabschnitt preispolitischer Aktivität der Markenanbieter. Auch der Gedanke, überhaupt keine Motivationen der Haushalte explizit zu berücksichtigen, hat einiges für sich. Hat man etwa die Übergangswahrscheinlichkeiten einer MARKOVschen Kette, die die Markenwahl der Haushalte beschreibt, direkt geschätzt, so bekommt man mit diesen Schätzwerten immerhin eine Marktanteilsprognose, die unter der Bedingung der Konstanz der wesentlichen Einflußvariablen gültig ist. Diese Konstanz der Einflußvariablen, also Konstanz etwa der Markenpreise, der Werbeintensitäten, der Produktgestaltung oder der Absatzmethoden ist auf vielen Konsumgütermärkten gar nicht so selten. Ist sie nicht gegeben, so ist eine solche Prognose für die Markenanbieter trotzdem durchaus nicht wertlos.

Man unterscheidet im Zusammenhang mit Überlegungen solcher Art zwischen ontologischem (seinsbezogenem) und epistemischem (erkenntnisbegründetem) Indeterminismus[1]. Ontologischer Indeterminismus liegt vor, wenn schon in der Wirklichkeit selbst eine Unbestimmtheit oder Nichtvoraussagbarkeit begründet ist. Er spielt eine zentrale Rolle in einigen Bereichen der modernen Physik (vgl. z. B. EISBERG [33, S.153-163]; FEYNMAN [45,S.6-10 und 6-11]). Dies geht gelegentlich schon so weit, daß für naturwissenschaftliche Zwecke stochastische Metriken eingeführt werden; d. h., man löst sich von der Vorstellung, zwischen zwei Raumpunkten gebe es so etwas wie einen durch eine Zahl ausdrückbaren Abstand, und unterstellt stattdessen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Man vergleiche hierzu insbesondere MENGER, K., B. SCHWEIZER und A. SKLAR: On Probabilistic Metrics and Numerical Metrics with Probability 1. Čekoslovackij matematičeskij žurnal, Prag, 9(1959), S.459-465. Epistemischer Indeterminismus ist gegeben, wenn die Unbestimmtheit nicht im Sein selbst vorliegt, sondern dadurch begründet ist, daß nicht alle Ursachen eines Geschehens erkennbar sind. Mit diesem epistemischen Indeterminismus ist der Verzicht auf die Berücksichtigung möglichst vieler Determinanten der Wahlakte der Haushalte auch dann zu rechtfertigen, wenn man für den ökonomischen Bereich das Vorhandensein eines seinsbezogenen Indeterminismus verneint.

11.2. Nochmals zur Rationalität des Konsumentenverhaltens

Bereits im Abschnitt 2.2. (S.18-20) und im Paragraphen 3 (S.30) dieser Arbeit wurde kurz dargelegt, daß

(1) für die Wahlakte der Haushalte die von der Verbrauchstheorie regelmäßig postulierte echte Rationalität aus verschiedenen Gründen in der Wirklichkeit nicht gegeben sein kann;

(2) eine solche Rationalität für lerntheoretische Modelle zur Markenwahl nicht gefordert zu werden braucht.

Zu untersuchen ist, ob bei den Markenwahlmodellen, die Gegenstand dieser Arbeit sind, überhaupt von irgendeiner Art Rationalverhalten der Haushalte ausgegangen wird, wie diese Rationalität, wenn sie vor-

[1] Der Verfasser verdankt diesen Gesichtspunkt einem Gespräch mit Herrn Professor Dr. E. M. Fels.

handen ist, charakterisiert werden kann und ob sich aus ihrer Eigenart Konsequenzen für den Anwendungsbereich dieser Modelle ergeben.

Bei den MARKOV-Modellen zur Markenwahl, denen die Annahme stochastischer Abhängigkeit eines individuellen Markenwahlvorganges von vorhergehenden Wahlakten zugrundeliegt, geht man, wie wir gesehen haben, von der Vorstellung aus, daß das konsumierende Individuum bei der Markenwahl als einzige Information seine jüngere Verbrauchserfahrung berücksichtigt. Werden die Übergangswahrscheinlichkeiten als von einigen relevanten Variablen abhängige Größen angesetzt, so ist damit die Annahme gemacht, daß einige weitere wesentliche Teilaspekte, etwa Markenpreise, in die Wahlentscheidungen eingehen. Die Voraussetzung eines perfekt rationalen Entscheidungsvorganges ist jedoch in diesen Modellen - schon auf Grund ihrer recht partiellen Problemstellung - grundsätzlich nicht enthalten. Andererseits kann keine Rede davon sein, daß hier die Annahme gemacht wäre, die Konsumentenentscheidungen bei der Markenwahl seien im Prinzip irrational fundiert. Vielmehr wird mit den reduzierten Anforderungen an die Rationalität dieser Entscheidungen nur der Tatsache Rechnung getragen, daß die qualitativen und preislichen Unterschiede zwischen verschiedenen konkurrierenden Marken bei vielen Konsumgütern so gering sind, daß für die Konsumenten eine umfassende und rational voll begründete Entscheidung nicht lohnt. Ein solches Argument ist im Einklang mit neueren und teilweise psychologisch ausgerichteten Tendenzen, die Vorstellung des in einem totalen Sinn rational handelnden Wirtschaftssubjektes abzubauen und durch die realistischere Hypothese einer eingeschränkten Rationalität (bounded rationality) ökonomischen Handelns zu ersetzen (vgl. SIMON [140]; [141,S.196-199]). Diese eingeschränkte Rationalität, die SIMON nicht nur dem Konsumenten, sondern sogar und vor allem dem Unternehmer zugesteht, hat keinen normativen, sondern deskriptiven Charakter (vgl. SIMON [140,S.243 ff.]). Das heißt, man fordert keineswegs, diese reduzierte Rationalität solle eine für die Wirtschaftswirklichkeit wünschenswerte Maxime sein; vielmehr gesteht man sich gleichsam mit einer gewissen Resignation einfach ein, daß eine völlige Rationalität ökonomischen Wahlverhaltens nicht erreichbar ist. Die Gründe hierfür liegen, wie bereits gezeigt wurde, nicht nur in den aus mehreren Gründen unvollkommenen Möglichkeiten der Wirtschaftssubjekte, solche Entscheidungen herbeizuführen, sondern - und dies vor allem bei der Markenwahl - in deren mangelnder

Bereitschaft, eine solche Entscheidung überhaupt zu suchen.

In diesem Zusammenhang ist die Frage berechtigt, ob diese mangelnde Neigung der Konsumenten, eine möglichst rationale Entscheidung anzustreben, für alle Wirtschaftsgüter, die in verschiedenen Marken angeboten werden, in gleicher Weise gegeben ist. Zweifellos ist dies nicht der Fall. Das rationale Engagement des Konsumenten bei der Markenwahl ist vielmehr unterschiedlich groß. Je mehr ein Konsumgutkauf sein Budget in Anspruch nimmt und je seltener ein Konsumgut von einem Haushalt gewählt wird, umso größer ist die bei der Markenwahl von ihm aufgewendete Sorgfalt. Daraus folgt, daß bei Markenwahlvorgängen für höherwertige Gebrauchsgüter mit langer Lebensdauer die in die MARKOV-Modelle zur Markenwahl eingehende Annahme reduzierten Rationalverhaltens der Haushalte nicht gegeben ist. Völlig irrelevant für Markenwahlvorgänge bei langlebigen Gebrauchsgütern werden lerntheoretische Modelle aus diesem Grund allerdings nicht. Es liegt nämlich recht nahe, bei der Definition der Zustände für ein lerntheoretisches Modell in diesem Zusammenhang nicht von wirklich getätigten Käufen, sondern Einstellungen (attitudes) der Konsumenten gegenüber den angebotenen Gebrauchsgütermarken auszugehen, ohne daß diese Haltungen durch Markenkäufe effizient zu werden brauchen. Daß solche Einstellungen, die nicht im Hinblick auf einen geplanten Kauf gebildet werden, auf der Basis nur eingeschränkter Rationalität zustandekommen, darf angenommen werden.

Primär sind die entwickelten lerntheoretischen Modelle zur Markenwahl jedoch auf kurzlebige Verbrauchsgüter des täglichen Bedarfes ausgerichtet, die im Wirtschaftsplan der Haushalte einzeln keine dominierende Rolle spielen und regelmäßig gekauft werden. Es sind dies im wesentlichen die Güter, bei denen, wie früher (vgl. Abschnitt 2.4.1. S.24-25) festgestellt wurde, man noch am ehesten von der Existenz einer individuellen Nachfragefunktion ausgehen kann. Längerlebige Gebrauchsgüter, für welche individuelle Nachfragefunktionen nicht existieren, ergeben auch hier theoretische Komplikationen.

11.3. Nochmals zur Definition eines Wirtschaftsgutes

Die im Paragraphen 3 (S.30) eingeführte vorläufige Definition eines Wirtschaftsgutes als Menge $K = \{K_1,\ldots,K_i,\ldots,K_m\}$ von ausstat-

tungsmäßig und qualitativ unterschiedenen Marken, die allgemein als stark substitutiv angesehen werden, bedarf einer erneuten Diskussion. Wir hatten insbesondere im Paragraphen 10 bei der kritischen Bewertung einiger empirischer Arbeiten gesehen, daß Verbrauchszustände gelegentlich in recht willkürlicher Weise definiert wurden (vgl. insbesondere 10.1.2. S.132-133 und 10.1.4. S.135-137), und gefordert, daß sich diese Zustandsdefinitionen an möglichen Ergebnissen konkreter Wahlakte der Haushalte orientieren sollen (vgl. 10.1.3. S.133-135).

Selbst wenn man sich bei der Festlegung der Menge der Verbrauchszustände korrekt auf die verschiedenen konkurrierenden Marken beziehen will, kommt man mit der Definition der Menge K in beträchtliche Schwierigkeiten, und zwar in zweifacher Hinsicht:

(1) Die Abgrenzung eines Marktes nach außen ist oft nicht in eindeutiger Weise durchzuführen, ein Problem, das beispielsweise im Abschnitt 10.1.3. (S.134) im Zusammenhang mit der Frage auftrat, ob Pulverkaffee und gewöhnlicher Kaffee im Zusammenhang mit der Markenwahl getrennt oder zusammengefaßt werden sollen.

(2) Von einem Anbieter werden manchmal nebeneinander verschiedene Qualitäten ein und desselben Artikels unter demselben Markenzeichen angeboten. Es muß geklärt werden, ob in solchen Fällen jede einzelne Qualität einen Verbrauchszustand ergibt, oder ob nur jede Marke, die dann als Aggregat verschiedener Güterqualitäten aufzufassen ist, einen Zustand definiert.

Zur Lösung des zuerst angeschnittenen Problems liefert die Wirtschaftstheorie einige Ansätze, die allerdings nicht in allen praktisch denkbaren Fällen Abhilfe schaffen können. Die CHAMBERLINschen Begriffe der "großen Gruppe" (large group) und "kleinen Gruppe" (small group) (vgl. [20,S.71 ff., insbesondere S.100-104]) auf das Problem der Markenwahl übertragend, kann man sagen: Stochastische Modelle zur Markenwahl beziehen sich auf Wahlvorgänge zwischen den Elementen einer "kleinen Gruppe", also einer Gruppe von Marken, die dadurch gekennzeichnet ist, daß eine Preisänderung eines Markenanbieters die Erlöse bei den übrigen zur Gruppe gehörenden Marken wesentlich verändert. Eine weitere Möglichkeit, die Menge K nach außen sinnvoll abzugrenzen, liefert der TRIFFINsche Substitutionselastizi-

tätskoeffizient, der die Stärke der Konkurrenzbeziehung zwischen zwei Unternehmungen mißt (vgl. TRIFFIN [163,S.97-105]). Die Abgrenzung der Zustandsmenge einer MARKOV-Kette zur Beschreibung der Markenwahl ist unter Zuhilfenahme des TRIFFINschen Koeffizienten dergestalt durchführbar, daß

(1) die Substitutionselastizitäten für zwei Elemente der Zustandsmenge sehr groß sind;

(2) diese Elastizitäten für Produkte, die nicht zu K gehören, in bezug auf Elemente aus K möglichst klein werden.

Sowohl der CHAMBERLINsche als auch der TRIFFINsche Ansatz ist auf Messungen von Konkurrenzgraden unter Berücksichtigung der Wirkung von Preisänderungen ausgerichtet. Ähnliche Überlegungen zur Quantifizierung der Stärke der Konkurrenz zwischen Unternehmungen kann man analog auch auf der Basis der Wirkung von Variationen der Werbeintensität oder anderer absatzpolitischer Instrumente anstellen. Die Abgrenzung der Markenmenge K ist dann jeweils primär auf die Angebotsseite des Marktes abgestellt.

Hat man auf solche Weise eine Menge K von Marken definiert, so ist damit allerdings noch nicht gesagt, daß für jeden Haushalt auf der Nachfrageseite des Marktes diese Menge K sinnvoll abgegrenzt wäre. Vielmehr muß davon ausgegangen werden, daß mindestens gelegentlich die Konkurrenznähe zweier Produkte individuell durchaus verschieden eingeschätzt wird, derart, daß eigentlich für verschiedene Haushalte verschiedene Zustandsmengen zu definieren sind. Versteht man die Markenwahlvorgänge entsprechend den Modelldarstellungen in den Paragraphen 4 und 5 dieser Arbeit mikroökonomisch, geht man also von individuellem Lernverhalten der einzelnen Haushalte aus, so sind in solchen Fällen schon bei der Festlegung der Zustandsmengen Aggregationsprobleme zu befürchten.

Eine Klärung der zweiten oben angeschnittenen Frage ist vermutlich nur von psychologisch ausgerichteten empirischen Untersuchungen zu erwarten. Es müßte festgestellt werden, ob das Lernverhalten der Haushalte vor allem an Markennamen oder an Produktqualitäten anknüpft. Solche Untersuchungen liegen bisher jedoch nicht vor. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als aus Gründen theoretischer Vorsicht zunächst

jeder Markenqualität einen Verbrauchszustand zuzuordnen und auf eine Zusammenfassung einzelner Markenqualitäten zu verzichten (vgl. Abschnitt 5.4. S.68-72).

11.4. Nochmals zum Aggregationsproblem

Die in dieser Arbeit entwickelte lerntheoretische Konzeption für die Markenwahlvorgänge der Haushalte ist ein grundsätzlich mikroökonomischer Ansatz, das heißt, das individuelle Wahlverhalten einer jeden Konsumeinheit wird für sich allein durch einen stochastischen Prozeß beschrieben. Eine zu diesem Ansatz analoge makroökonomische Konstruktion hat man, wenn man annimmt, daß die Gesamtheit der individuellen Markenwahlvorgänge für ein Wirtschaftsgut wiederum ausgedrückt werden kann durch einen solchen stochastischen Prozeß mit derselben Zustandsmenge, dessen absolute Wahrscheinlichkeiten direkt die interessierenden Makrogrößen, also die Marktanteile, ergeben.

Geht man von einer solchen Analogie zwischen mikrotheoretischem und makrotheoretischem Modell aus, so bekommt man übereinstimmende Ergebnisse aus beiden Ansätzen nur für Spezialfälle, nämlich dann, wenn

(1) entweder das Unabhängigkeitsmodell zugrundegelegt wird, man also die Markenwahlvorgänge als Folgen im Zeitablauf und interindividuell unabhängiger Versuche auffaßt; in diesem Fall gehen in das Makromodell die arithmetischen Mittel der individuellen Wahlwahrscheinlichkeiten ein (vgl. Abschnitt 4.3.1. S.39 ff.);

(2) zwar ein MARKOV-Modell erster oder höherer Ordnung verwendet wird, die Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten oder Übergangsraten für alle Mikroeinheiten jedoch gleich sind; in diesem Fall sind diese Übergangswahrscheinlichkeiten oder -Raten auch im Makromodell zu verwenden (vgl. Abschnitt 5.3. S.66-68).

Macht man dagegen die realistischere Annahme, daß die Übergangsmaße von Haushalt zu Haushalt verschieden sind, dann geht die Konsistenz der Aggregation (vgl. die Definition im Abschnitt 2.4. S.24) verloren, wenn man die haushaltsspezifischen Lernprozesse nicht einzeln durchrechnet. Denn in diesem Fall sind die Marktanteile nur zu berechnen mittels durchschnittlicher absoluter Wahlwahrscheinlichkeiten, nicht aber mittels gemittelter Übergangsmaße, wie im Abschnitt 5.5.1.

S.72-78 gezeigt wurde. Die Suche nach einem mathematisch-technischen Verfahren, mit dessen Hilfe eine konsistente Aggregation bei mikroökonomisch und makroökonomisch analogen Modellansätzen durchführbar wäre, ist vermutlich nicht sehr aussichtsreich. Bei dem auf Seite 76-77 kurz erwähnten Ansatz, die Gesamtheit der individuellen Markenwahlprozesse in einer Volkswirtschaft für ein Wirtschaftsgut durch eine MARKOV-Kette mit einer Zustandsmenge $\mathfrak{K}$ von m^N Zuständen zu beschreiben, ist diese Konsistenz unter der angegebenen Bedingung der interindividuellen Unabhängigkeit der Markenwahl zwar gegeben; man kann hier jedoch nicht von einem echten Aggregationsverfahren sprechen, weil die individuellen Markenwahlprozesse eigentlich nur mathematisch verknüpft werden, ohne daß Mikrogrößen durch Makrogrößen ersetzt und dadurch Vereinfachungen erreicht würden.

Läßt man individuell verschiedene Übergangsmaße zu und will man dennoch Modelle zur Markenwahl durch Aggregation handlich machen, so bleibt vorläufig keine andere Möglichkeit, als die Haushalte nach Wahlverhaltensweisen in einige Schichten einzuteilen (vgl. Abschnitt 5.5.1. S.77-78), um durch einen verminderten Aggregationsgrad eine wenigstens angenäherte Konsistenz zu erreichen. Damit ist aber das Aggregationsproblem für die individuellen Lernprozesse keineswegs völlig befriedigend und sicherlich nicht besser als für individuelle Nachfragefunktionen in der traditionellen Verbrauchstheorie gelöst.

§ 12 Der Begriff des ökonomischen Gleichgewichts im Zusammenhang mit der Markenwahl

Versteht man die Markenwahlvorgänge eines Haushalts als MARKOVsche Prozesse mit stetiger oder diskreter Zeitachse, so stellt sich, wie im Paragraphen 5 gezeigt wurde, nach sehr vielen Markenübergängen eine stationäre Endsituation ein, die durch im Zeitablauf konstant bleibende absolute Wahlwahrscheinlichkeiten gekennzeichnet ist. Dies gilt natürlich nur unter der Bedingung konstanter Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten oder -Raten. Es liegt sehr nahe, diese stationäre Endsituation mit dem Begriff des wirtschaftlichen Gleichgewichts in Zusammenhang zu bringen.

Unglücklicherweise fehlt auch bei modernsten wirtschaftstheoretischen

Beiträgen zum Gleichgewichtsbegriff im allgemeinen der Bezug auf stochastische Prozesse zur Erklärung wirtschaftstheoretischer Sachverhalte. Dies gilt insbesondere für die Monographie von KUENNE [93]; eine Ausnahme bildet allerdings der Artikel von BRANDT [14, insbesondere S.605], in dem MARKOV-Prozesse kurz erwähnt werden. Es kann sich daher hier nur um einen ersten Versuch handeln, die stationäre Endsituation für die Markenwahlvorgänge der Haushalte als Gleichgewicht zu interpretieren.

Geht man von dem Datum einer fest bleibenden Übergangsmatrix für einen einzelnen Haushalt aus, so beschreibt ein lerntheoretisches und damit dynamisches Markenwahlmodell die endogenen Bewegungen (vgl. SCHNEIDER [133,S.277]), die nach vielen Markenwahlakten zu einer Beharrungslage führen. Die Stabilität dieser aus der lerntheoretischen Ablaufanalyse der Markenwahlvorgänge resultierenden Endsituation ist natürlich statistisch zu verstehen. Das heißt, auch in dieser Endsituation werden im allgemeinen durch einen Haushalt von Markenwahlvorgang zu Markenwahlvorgang verschiedene Marken gewählt; nur die absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Marken verändern sich nicht mehr. Die Folgerung, daß wegen dieser nur statistischen Stabilität der Markenwahlvorgänge in der Endsituation hier überhaupt nicht von einem Gleichgewicht im Sinne der Wirtschaftstheorie gesprochen werden dürfe, ist aber unberechtigt angesichts der vielen sehr verschiedenen Inhalte, mit denen der Begriff des ökonomischen Gleichgewichts belegt wird.

Die stationäre Endsituation lerntheoretischer Modelle zur Markenwahl wird deshalb hier als eine spezielle Erscheinungsform ökonomischen Gleichgewichts aufgefaßt, bei dem die Variablen, die im Zeitablauf immer wieder dieselben Werte annehmen, Wahrscheinlichkeiten sind. Dieses Gleichgewicht ist auf seine wirtschaftstheoretisch wesentlichsten Eigenschaften zu untersuchen. Um schwierigen oligopoltheoretischen Überlegungen aus dem Wege zu gehen, beschränken wir unsere Erörterungen auf die Nachfrageseite der Märkte, verzichten also auf eine Gleichgewichtsbetrachtung zu den Entscheidungsmodellen, die im Kapitel 3 (S.91 ff.) dieser Arbeit entwickelt wurden. Man kann sagen:

(1) Die stationäre Endsituation, die sich aus einer dynamischen Analyse des Markenwahlverhaltens eines Haushaltes ergibt, ist, da sie sich zunächst auf eine individuelle Wirtschaftseinheit bezieht, ein

mikroökonomisches Gleichgewicht. Das entsprechende makroökonomische Gleichgewicht liegt vor, wenn sich die Erwartungswerte der Marktanteile trotz Lernverhaltens der Haushalte nicht ändern. Es ist sicher gegeben, wenn alle Haushalte der Volkswirtschaft für das betrachtete Wirtschaftsgut den stationären Endzustand erreicht haben, auch wenn die individuellen Übergangsmatrizen verschieden sind. Allerdings kann sich ein solches makroökonomisches Gleichgewicht durchaus auch einstellen, ohne daß sich alle Haushalte im Gleichgewicht befinden, wenn sich die dann möglichen Veränderungen der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten gegenseitig kompensieren.

(2) Dieses Gleichgewicht ist ein partielles Gleichgewicht, weil es nur auf einen sehr speziellen ökonomischen Teilzusammenhang ausgerichtet ist. Da es sich nur auf die Markenwahlvorgänge bei einem Wirtschaftsgut bezieht, ist es viel partieller als beispielsweise das Haushaltsgleichgewicht im Sinne der Präferenz- oder Nutzentheorie (vgl. Abschnitte 1.1.1. und 1.1.2. S.1-7).

(3) Das Gleichgewicht, von dem hier die Rede ist, enthält keine irgendwie geartete Optimallösung, sondern resultiert aus einer hauptsächlich deskriptiven Ablaufanalyse. Dies folgt aus dem Prinzip eingeschränkter Rationalität, von dem bei einer lerntheoretischen Analyse der Markenwahlvorgänge ausgegangen wird (vgl. Abschnitt 11.2. S.142-144). Es unterscheidet sich insofern beispielsweise von den individuellen Gleichgewichtssituationen, die in der Theorie des Haushalts oder in der Theorie der Unternehmung abgeleitet werden.

(4) Dieses Gleichgewicht ist eindeutig, weil der Vektor der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten in der Endsituation für ein MARKOV-Modell zur Markenwahl eindeutig bestimmbar ist, wenn man davon ausgeht, daß keine periodischen Zustände vorliegen (vgl. Abschnitt 5.2.3. S.59 und 61).

(5) Die stationäre Endsituation bei Markenwahlvorgängen ist in der Regel ein stabiles Gleichgewicht. Ist etwa eine MARKOVsche Kette, die einem Markenwahlprozeß zugrundeliegt, irreduzibel, so ist die Endsituation, wie wir gesehen haben (vgl. Abschnitt 5.2.4. S.63), unabhängig von den Anfangsbedingungen. Tritt also im Ablauf des Lernprozesses oder in einer bereits erreichten Endsituation irgendeine Störung ein, so stellt sich bei irreduziblen Ketten immer wieder dieselbe, durch ganz bestimmte absolute Wahlwahrscheinlichkeiten festgelegte

Endsituation ein, wenn die Übergangsmatrix konstant bleibt. Ist die Kette reduzibel, so besteht allerdings die Möglichkeit, daß die Gleichgewichtssituationen nicht unabhängig sind von den Ausgangsbedingungen. In diesem Fall kann sich durch eine Störung ein Gleichgewicht ergeben, das verschieden ist von dem Gleichgewicht, das sich ohne Störung eingestellt hätte oder vor der Störung gegeben war. Es liegt dann ein labiles Gleichgewicht vor.

A n h a n g

ERGÄNZUNGEN ZU KAPITEL 2: LERNTHEORETISCHE MODELLE ZUR BESCHREIBUNG UND PROGNOSE DER KONSUMGÜTERMARKENWAHL

Zu 4.3.1. (S.40) und 5.2.4. (S.61-62).

Erzeugende Funktionen

Definition 1: $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sei eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert die Potenzreihe

$$\Phi(z) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t \cdot z^t$$

in einem Intervall $-z_0 < z < +z_0$, so heißt $\Phi(z)$ die erzeugende Funktion der Folge (c_t). Die Variable z hat für sich allein keine Bedeutung.

Ist (c_t) eine Folge von Wahrscheinlichkeiten, so konvergiert, wie ein Vergleich mit der geometrischen Reihe ergibt, $\Phi(z)$ mindestens für $-1 < z < +1$. Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte 0,1,2,... mit den Wahrscheinlichkeiten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ annimmt, dann ist $\Phi(1) = 1$. Also ist in diesem Fall die obige Potenzreihe im abgeschlossenen Intervall $-1 \leq z \leq +1$ absolut und gleichmäßig konvergent, und die erzeugende Funktion stetig. Folgende Theoreme gelten:

Theorem 1: Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte 0,1,2,... mit den Wahrscheinlichkeiten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ annimmt und existiert E X, so gilt:

$$E\,X = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot c_t = \frac{d\Phi(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \Phi'(1)$$

wegen $\Phi'(z) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t \cdot t \cdot z^{t-1}$ und damit $\Phi'(1) = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot c_t$

Theorem 2: Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte 0,1,2,... mit den Wahrscheinlichkeiten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ annimmt und existiert var X, so gilt:

$$\text{var } X = \sum_{t=0}^{\infty} t^2 \cdot c_t - \left(\sum_{t=0}^{\infty} t \cdot c_t\right)^2 = \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} + \frac{d\Phi(z)}{dz} - \left(\frac{d\Phi(z)}{dz}\right)^2\Big|_{z=1}$$

$$= \Phi''(1) + \Phi'(1) - \Phi'^2(1) \quad , \text{ denn}$$

$$\Phi''(z) + \Phi'(z) - \Phi'^2(z) =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t-1)t.c_t.z^{t-2} + \sum_{t=0}^{\infty} t.c_t.z^{t-1} - (\sum_{t=0}^{\infty} t.c_t.z^{t-1})^2 \quad ;$$

also ist

$$\Phi''(1) + \Phi'(1) - \Phi'^2(1) = \sum_{t=0}^{\infty} t^2.c_t - (\sum_{t=0}^{\infty} t.c_t)^2 = \text{var } X \; .$$

Definition 2: (c_t^I) und (c_t^{II}) seien zwei Folgen reeller Zahlen. Die Folge (c_t^{III}) mit

$$c_t^{III} = c_o^I \, c_t^{II} + c_1^I \, c_{t-1}^{II} + \ldots + c_{t-1}^I \, c_1^{II} + c_t^I \, c_o^{II}$$

heißt Faltung der Folgen (c_t^I) und (c_t^{II}), und man schreibt

$$(c_t^{III}) = (c_t^I) * (c_t^{II}) \quad .$$

$\Phi_I(z)$, $\Phi_{II}(z)$ und $\Phi_{III}(z)$ seien die erzeugenden Funktionen der Folgen (c_t^I), (c_t^{II}) und (c_t^{III}). Ist (c_t^{III}) die Faltung der Folgen (c_t^I) und (c_t^{II}), dann gilt

$$\Phi_{III}(z) = \Phi_I(z).\Phi_{II}(z) \quad ,$$

was man leicht durch Zusammenfassung von Ausdrücken mit gleichen Potenzen von z auf der rechten Seite dieser Gleichung nachweisen kann.

Sind X und Y zwei nichtnegative ganzzahlige und unabhängige Zufallsvariablen, deren Verteilungen die erzeugenden Funktionen $\Phi_I(z)$ und $\Phi_{II}(z)$ haben, so ist die Verteilung der Zufallsvariablen X + Y durch die erzeugende Funktion

$$\Phi_{III}(z) = \Phi_I(z).\Phi_{II}(z)$$

darstellbar.

Faltungen von mehr als zwei Zahlenfolgen (c_t^I), (c_t^{II}), (c_t^{III}), ... mit den erzeugenden Funktionen $\Phi_I(z)$, $\Phi_{II}(z)$, $\Phi_{III}(z)$, ... haben die erzeugende Funktion

$$\Phi_F(z) = \Phi_I(z).\Phi_{II}(z).\Phi_{III}(z). \ \ldots$$

und man sieht leicht ein, daß die Faltung eine assoziative und kommutative Operation ist.

Abschließend sei als Beispiel die erzeugende Funktion der Binomialverteilung mit den Parametern N und p dargestellt. Man setzt:

$$c_o = \binom{N}{0}p^0(1-p)^N; \ \ldots \ ; \ \ c_N = \binom{N}{N}p^N(1-p)^0; \ \ c_{N+1} = 0; \ \ldots$$

und erhält

$$\Phi_B(z) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t.z^t = \sum_{t=0}^{N} \binom{N}{t}(pz)^t(1-p)^{N-t} = (1-p+pz)^N$$

Erwartungswert und Varianz lassen sich mittels obiger Theoreme 1 und 2 leicht errechnen.

Zu 5.2.3. (S.59).

Einige numerische Beispiele zu Zustandsklassifikationen einer MARKOVschen Kette erster Ordnung

Beispiel 1: Eine MARKOVsche Kette mit 3 Zuständen habe die Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Man erhält:

(1) Die Kette ist reduzibel, weil $\{K_1, K_2\}$ eine abgeschlossene Zustandsmenge ist wegen $p(1,3) = p(2,3) = 0$.

(2) Die Zustände K_1 und K_2 sind persistent, K_3 dagegen ist transient wegen

$$F(1,1) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \ldots + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{t-2}\cdot\frac{1}{5} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\cdot 5 = 1$$

$$F(2,2) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(2,2) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \ldots + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{t-2}\cdot\frac{3}{4} + \ldots$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{20}\cdot\frac{4}{3} = 1$$

$$F(3,3) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(3,3) = \frac{1}{5} < 1$$

(3) Die Wahrscheinlichkeit $F(1,2)$ dafür, daß vom Ausgangszustand K_1 aus der Zustand K_2 jemals erreicht wird, beträgt

$$F(1,2) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(1,2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{t-1} + \ldots = 1$$

In gleicher Weise erhält man $F(2,1) = F(3,1) = F(3,2) = 1$; dagegen ist offensichtlich $F(1,3) = F(2,3) = 0$.

(4) Die mittleren Rekurrenzzeiten der persistenten Zustände K_1 und K_2 sind wie folgt zu berechnen:

$$M_1 = \sum_{t=1}^{\infty} t.f^{(t)}(1,1) = 1.\frac{1}{4} + 2.\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + 3.\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \ldots + t.\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{t-2}\cdot\frac{1}{5} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{20}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(t+2)\left(\frac{4}{5}\right)^{t} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{20}\cdot\sum_{t=0}^{\infty} t.\left(\frac{4}{5}\right)^{t} = \frac{7}{4} + \frac{3}{20}.20 = \frac{19}{4}$$

$$M_2 = \sum_{t=1}^{\infty} t.f^{(t)}(2,2) = 1.\frac{4}{5} + 2.\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4} + 3.\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \ldots + t.\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{t-2}\cdot\frac{3}{4} + \ldots$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{20}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(t+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{t} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{20}\cdot\sum_{t=0}^{\infty} t.\left(\frac{1}{4}\right)^{t} = \frac{6}{5} + \frac{3}{20}\cdot\frac{4}{9} = \frac{19}{15}$$

denn wegen

$$\frac{d}{dx}\sum x^{t} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum t.x^{t-1} = \frac{1}{x}\sum t.x^{t}$$

für $0 < x < 1$ folgt:

$$\sum_{t=0}^{\infty} t.x^{t} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(5) Streicht man bei der Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ die letzte Zeile und die letzte Spalte, so bleibt eine zweireihige stochastische Matrix übrig,

die eine irreduzible MARKOVsche Kette repräsentiert. An der Berechnung der Größen F(1,1); F(2,2); F(1,2); F(2,1); μ_1 und μ_2 ändert sich nichts.

Beispiel 2: Eine MARKOVsche Kette mit 5 Zuständen sei gekennzeichnet durch die Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Unter anderem ergibt sich:

(1) $\mathfrak{M}$ stellt eine reduzible MARKOVsche Kette dar, denn die Zustandsmengen $C_1 := \{K_1, K_2\}$ und $C_2 := \{K_3, K_4\}$ sind abgeschlossen wegen

$p(1,3) = p(1,4) = p(1,5) = p(2,3) = p(2,4) = p(2,5) = 0$ und
$p(3,1) = p(3,2) = p(3,5) = p(4,1) = p(4,2) = p(4,5) = 0$.

(2) Der Zustand K_1 ist persistent, weil

$$F(1,1) = \sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(1,1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\cdot 2 = 1 \quad \text{ist.}$$

Ebenso erhält man $F(2,2) = F(3,3) = F(4,4) = 1$; K_2, K_3, K_4 sind also ebenfalls persistent. Dagegen ist K_5 transient wegen

$$F(5,5) = f^{(1)}(5,5) = \frac{1}{8} < 1 \quad .$$

(3) Die mittleren Rekurrenzzeiten der persistenten Zustände K_1 und K_2 erhält man wie folgt:

$$\mu_1 = \sum_{t=1}^{\infty} t\cdot f^{(t)}(1,1) = 1\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + t\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (t+2)\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\mu_2 = \sum_{t=1}^{\infty} t.f^{(t)}(2,2) = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \ldots + t.\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{4}\right)^{t-2}.\frac{1}{4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (t+2)\left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3 .$$

Auf analoge Weise ergibt sich $\mu_3 = 6$; $\mu_4 = \frac{6}{5}$. K_1, K_2, K_3, K_4 sind also keine Nullzustände.

(4) Der Zustand K_1 ist aperiodisch, da $p^{(t)}(1,1) > 0$ für alle $t=1,2,3,\ldots$ ist. Gleiches gilt für alle anderen Zustände.

(5) K_1, K_2, K_3, K_4 sind also persistent, aperiodisch und keine Nullzustände, also ergodisch.

Zu 5.2.3. (S.60).

Beweis
======

des Satzes: Sind bei einer homogenen MARKOVschen Kette erster Ordnung nur endlich viele Zustände möglich, hat also die Übergangsmatrix nur endlich viele Reihen, so existieren keine Nullzustände.

Angenommen, $\mathfrak{M}$ sei eine m-reihige Übergangsmatrix, K_i ein Nullzustand und C_i die dem (persistenten) Zustand K_i zugeordnete abgeschlossene Zustandsmenge.

Es sei zunächst K_k ein beliebiger Zustand in C_i, damit also von K_i aus sicher erreichbar, und t_1 die Länge des kürzesten möglichen Pfades von K_i nach K_k. Dann ist $p^{(t_1)}(i,k) > 0$. Eine Rückkehr von K_k nach K_i muß möglich sein, sonst wäre die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr von K_i nach K_i höchstens $1 - p^{(t_1)}(i,k)$, somit kleiner als 1, und K_i wäre nicht persistent. Es existiert also ein t_2 derart, daß $p^{(t_2)}(k,i) > 0$ ist. Da für alle $t=1,2,\ldots$ die Beziehungen

$$p^{(t+t_1+t_2)}(i,i) \geq p^{(t_1)}(i,k)p^{(t)}(k,k)p^{(t_2)}(k,i)$$

und

$$p^{(t+t_1+t_2)}(k,k) \geq p^{(t_2)}(k,i)p^{(t)}(i,i)p^{(t_1)}(i,k)$$

gelten, ergibt sich, daß die Folgen $\left\{ p^{(t)}(i,i) \right\}$ und $\left\{ p^{(t)}(k,k) \right\}$ und damit alle sich auf die Zustandsmenge C_i beziehenden solchen Folgen dasselbe asymptotische Verhalten aufweisen.

Nun gilt für den (persistenten) Nullzustand K_i wegen $\mu_i = \infty$

$$\lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,i) = 0 .$$

Dies folgt direkt aus dem im Abschnitt 5.2.4. (S.62) formulierten Satz 2, der weiter unten bewiesen wird. Folglich ist

$$\lim_{t \to \infty} p^{(t)}(k,k) = 0 \quad \text{für alle } K_k \in C_i .$$

Außerdem hat man, wenn man $p^{(0)}(k,k) := 1$ setzt, die Beziehung

$$\begin{aligned} p^{(t)}(i,k) &= f^{(1)}(i,k)p^{(t-1)}(k,k) + f^{(2)}(i,k)p^{(t-2)}(k,k) + \ldots \\ &\qquad + f^{(t)}(i,k)p^{(0)}(k,k) \\ &= \left[f^{(1)}(i,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + f^{(t')}(i,k)p^{(t-t')}(k,k) \right] + \\ &\quad + \left[f^{(t'+1)}(i,k)p^{(t-t'-1)}(k,k) + \ldots + f^{(t)}(i,k)p^{(0)}(k,k) \right] \\ &\qquad \text{falls} \quad 1 < t' < t \\ &\leq \left[f^{(1)}(i,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + f^{(t')}(i,k)p^{(t-t')}(k,k) \right] + \\ &\quad + \left[f^{(t'+1)}(i,k) + \ldots + f^{(t)}(i,k) \right] \end{aligned}$$

Für ein festes t' ist

$$\lim_{t \to \infty} p^{(t-t')}(k,k) = \lim_{t \to \infty} p^{(t)}(k,k) = 0$$

Außerdem erhält man, da sicher $F(i,k) < \infty$ ist,

$$\lim_{t,t' \to \infty} \left(f^{(t'+1)}(i,k) + \ldots + f^{(t)}(i,k) \right) = 0 ;$$

folglich ist auch

$$\lim_{t \to \infty} p^{(t)}(i,k) = 0 .$$

Dies gilt für alle $K_k \in C_i$.

Ist also K_i einmal realisiert, so können einerseits nur noch Zustände aus C_i erreicht werden, da C_i abgeschlossen ist. Andererseits ist, da C_i nur endlich viele Zustände enthält,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{K_k \in C_i} p^{(t)}(i,k) = 0 \ .$$

Aus diesem Widerspruch folgt, daß K_i kein Nullzustand sein kann.

Zu 5.2.4. (S.61).

Beweis

von Satz 1: Bei beliebigem (persistentem oder transientem) Ausgangszustand K_i ist für alle transienten Zustände K_k

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = 0 \qquad (i \in \{1,\ldots,m\})$$

Zunächst gilt unter Berücksichtigung der hier eingeführten Definitionen und Symbole:

α) Die Aussagen $F(i,i) = 1$ und $P(i,i) := \sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(i,i) = \infty$

sowie

β) die Aussagen $F(i,i) < 1$ und $P(i,i) < \infty$

sind äquivalent.

Zum Beweis dieser Behauptung definieren wir zunächst $f^{(0)}(i,i) := 0$; $p^{(0)}(i,i) = 1$, sowie

$$\Phi_1(z) := \sum_{t=0}^{\infty} f^{(t)}(i,i).z^t \quad \text{und} \quad \Phi_2(z) := \sum_{t=0}^{\infty} p^{(t)}(i,i).z^t$$

als erzeugende Funktionen der beschränkten Zahlenfolgen $\left\{ f^{(t)}(i,i) \right\}$ bzw. $\left\{ p^{(t)}(i,i) \right\}$. Nun ist, falls $t > 0$,

$$f^{(t)}(i,i) = p^{(t)}(i,i) - f^{(1)}(i,i)p^{(t-1)}(i,i) - \ldots - f^{(t-1)}(i,i)p(i,i)$$

oder, unter Berücksichtigung obiger Definitionen,

$$p^{(t)}(i,i) = f^{(t)}(i,i)p^{(0)}(i,i) + f^{(t-1)}(i,i)p^{(1)}(i,i) + \ldots$$

$$+ f^{(1)}(i,i)p^{(t-1)}(i,i) + f^{(0)}(i,i)p^{(t)}(i,i)$$

Die Folge $\left\{ p^{(t)}(i,i) \right\}$ entsteht also im wesentlichen durch Faltung der Folgen $\left\{ p^{(t)}(i,i) \right\}$ und $\left\{ f^{(t)}(i,i) \right\}$; wegen $p^{(0)}(i,i) := 1$ ist jedoch beim Übergang zu erzeugenden Funktionen eine entsprechende Korrektur nötig. Unter Verwendung eines in diesem Anhang (S.153) bereits formulierten Satzes aus der Theorie der erzeugenden Funktionen erhält man deshalb

$$\Phi_2(z) - 1 = \Phi_1(z).\Phi_2(z) \qquad \text{oder}$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{1 - \Phi_1(z)}$$

Nun ist

$$P(i,i) = \sum_{t=0}^{\infty} p^{(t)}(i,i) = \lim_{z \uparrow 1} \Phi_2(z) = \frac{1}{1 - \lim\limits_{z \uparrow 1} \Phi_1(z)}$$

und

$$\lim_{z \uparrow 1} \Phi_1(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f^{(t)}(i,i) = F(i,i) \begin{cases} = 1, \text{ falls } K_i \text{ persistent} \\ < 1, \text{ falls } K_i \text{ transient} \end{cases}$$

Folglich divergiert (konvergiert) $P(i,i)$ genau dann, wenn $F(i,i) = 1$ ($F(i,i) < 1$) ist, also wenn K_i persistent (transient) ist.

Satz 1 kann nun leicht bewiesen werden. Da K_k ein transienter Zustand ist, gilt

$$\sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(k,k) < \infty$$

Wir definieren: $p^{(0)}(i,k) := 0$; $f^{(0)}(i,k) := 0$ sowie $p^{(0)}(k,k) := 1$ und

$$\Phi_3(z) := \sum_{t=0}^{\infty} p^{(t)}(i,k).z^t \quad ; \quad \Phi_4(z) := \sum_{t=0}^{\infty} f^{(t)}(i,k).z^t$$

sowie

$$\Phi_5(z) := \sum_{t=0}^{\infty} p^{(t)}(k,k).z^t$$

als erzeugende Funktionen der Folgen $\left\{ p^{(t)}(i,k) \right\}$; $\left\{ f^{(t)}(i,k) \right\}$ und $\left\{ p^{(t)}(k,k) \right\}$. Wegen

$$p^{(t)}(i,k) = f^{(t)}(i,k)p^{(0)}(k,k) + \ldots + f^{(0)}(i,k)p^{(t)}(k,k)$$

für t=0,1,2,... erhält man durch Übergang zu erzeugenden Funktionen

$$\Phi_3(z) = \Phi_4(z).\Phi_5(z)$$

und damit

$$\sum_{t=0}^{\infty} p^{(t)}(i,k) = \sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(i,k) = \lim_{z\uparrow 1} \Phi_3(z) = \lim_{z\uparrow 1} (\Phi_4(z).\Phi_5(z))$$

Da $\lim_{z\uparrow 1} \Phi_4(z)$ existiert wegen $0 \leq F(i,k) \leq 1$ und

$$\lim_{z\uparrow 1} \Phi_5(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(k,k)$$

ist, folgt:

$$\sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(i,k) \leq 1(1 + \sum_{t=1}^{\infty} p^{(t)}(k,k)) < \infty$$

Folglich ist $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = 0$.

Zu 5.2.4. (S.62).

Beweis

von Satz 2: Ist K_k ein persistenter (aperiodischer) Zustand einer homogenen MARKOVschen Kette erster Ordnung, so gilt:

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = \frac{F(i,k)}{\mu_k}$$

Wir benötigen für diesen Beweis einen Hilfssatz: Ist K_k ein (aperiodischer) persistenter Zustand, dann gilt:

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(k,k) = \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{\infty} t.f^{(t)}(k,k)}$$

Dies ist das sogenannte ERDÖS-FELLER-POLLARD-Theorem [34] (vgl. auch FELLER [38,S.306-307]). Der nachfolgende Beweis dieses Theorems wurde dem Buch von ROSENBLATT [125,S.57-59] entnommen.

Wir definieren: $f^{(0)}(k,k) := 0$; $p^{(0)}(k,k) := 1$. Da K_k voraussetzungsgemäß persistent ist, gilt: $F(k,k) = 1$. Da K_k außerdem aperio-

disch ist, ist 1 der größte gemeinsame Teiler der natürlichen Zahlen t, für welche $f^{(t)}(k,k) > 0$ gilt (vgl. Definition 3 S.59).

Definiert man weiter $r^{(t)}(k,k) = f^{(t+1)}(k,k) + f^{(t+2)}(k,k) + \ldots$, so ist zunächst

$$r^{(0)}(k,k) = 1 \; ; \; \mu_k = \sum_{t=0}^{\infty} r^{(t)}(k,k)$$

sowie

$$f^{(t)}(k,k) = r^{(t-1)}(k,k) - r^{(t)}(k,k)$$

für t=1,2,...; unter Verwendung der zuletzt genannten Identität erhält man mittels

$$p^{(t)}(k,k) = f^{(1)}(k,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + f^{(t)}(k,k)p^{(0)}(k,k)$$

folgende Beziehung:

$$\sum_{t_o=0}^{t} r^{(t_o)}(k,k)p^{(t-t_o)}(k,k) = \sum_{t_o=0}^{t-1} r^{(t_o)}(k,k)p^{(t-1-t_o)}(k,k) =$$

$$= \sum_{t_o=0}^{t-2} r^{(t_o)}(k,k)p^{(t-2-t_o)}(k,k) = \ldots = r^{(0)}(k,k)p^{(0)}(k,k) = 1 \quad (*)$$

Sei $\delta_{sup} = \overline{\lim_{t\to\infty}} p^{(t)}(k,k)$ sowie $t_o > 0$ derart, daß $f^{(t_o)}(k,k) > 0$ ist. Wir wollen zunächst nachweisen, daß, falls (t_ν) eine zunehmende Folge mit

$$\lim_{t_\nu\to\infty} p^{(t_\nu)}(k,k) = \delta_{sup}$$

darstellt, auch

$$\lim_{t_\nu\to\infty} p^{(t_\nu - t_o)}(k,k) = \delta_{sup}$$

gilt. Wäre diese Behauptung nicht richtig, so könnte man in der Folge (t_ν) beliebig große t finden, für welche gilt:

$$p^{(t-t_o)}(k,k) < \delta' < \delta_{sup}$$

Sei θ so groß, daß $r^{(\theta)}(k,k) = \sum_{t_o=\theta+1}^{\infty} f^{(t_o)}(k,k) < \varepsilon$ ist ($\varepsilon > 0$). Wegen

$$0 \leq p^{(t)}(k,k) \leq 1$$

gilt dann für $t > \theta$

$$p^{(t)}(k,k) \leq f^{(0)}(k,k)p^{(t)}(k,k) + f^{(1)}(k,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + f^{(\theta)}(k,k)p^{(t-\theta)}(k,k) + \varepsilon$$

Für genügend große t mit $t > \theta$ ergäbe sich dann

$$\begin{aligned}\delta_{sup} - \varepsilon < p^{(t)}(k,k) &< \left[f^{(0)}(k,k) + \ldots + f^{(t_o-1)}(k,k) + f^{(t_o+1)}(k,k) + \ldots + f^{(0)}(k,k)\right](\delta_{sup} + \varepsilon) + f^{(t_o)}(k,k)\delta' + \varepsilon \\ &= (1 - f^{(t_o)}(k,k))(\delta_{sup} + \varepsilon) + f^{(t_o)}(k,k)\delta' + \varepsilon \\ &< \delta_{sup} + 2\varepsilon - f^{(t_o)}(k,k)(\delta_{sup} - \delta')\end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch für

$$f^{(t_o)}(k,k)(\delta_{sup} - \delta') > 3\varepsilon$$

Daher gilt

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - t_o)}(k,k) = \delta_{sup}$$

und auf Grund desselben Gedankenganges

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - xt_o)}(k,k) = \delta_{sup}$$

für jede feste natürliche Zahl x.

Auf dieselbe Art und Weise folgt, daß, falls

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} p^{(t)}(k,k) = \delta_{inf}$$

und (t_ν) irgendeine Folge mit

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu)}(k,k) = \delta_{inf}$$

ist, auch

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - xt_o)}(k,k) = \delta_{inf}$$

richtig ist.

Wir betrachten nun alle natürlichen Zahlen t_o mit $f^{(t_o)}(k,k) > 0$. Es existiert eine endliche Teilmenge a,b,c,...,q dieser Zahlen, für die der größte gemeinsame Teiler 1 ist. Durch Verallgemeinerung obiger Aussage ergibt sich, daß, falls

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu)}(k,k) = \delta_{sup}$$

ist, auch

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - xa - yb - \ldots - wq)}(k,k) = \delta_{sup}$$

ist für alle festen natürlichen Zahlen x,y,...,w. Nun kann, was hier ohne Beweis vorausgesetzt wird, jede ganze Zahl $l > a.b.c. \ldots .q$ dargestellt werden als $l = xa+xb+\ldots+wq$ mit $x,\ldots,w > 0$. Deshalb gilt

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - l)}(k,k) = \delta_{sup}$$

für alle $l > a.b. \ldots .q$. Für die Konvergenz gegen δ_{inf} erhält man ein analoges Ergebnis.

Sei nun

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu)}(k,k) = \delta_{sup}$$

Dann gilt

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu - l)}(k,k) = \delta_{sup} \quad ,$$

falls $l > a.b. \ldots .q$. Setzt man $t = t_\nu - a.b. \ldots .q - 1$, so erhält man aus (*) für alle t und beliebiges $\theta \leq t$

$$1 \geq r^{(0)}(k,k)p^{(t)}(k,k) + r^{(1)}(k,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + r^{(\theta)}(k,k)p^{(t-\theta)}(k,k)$$

Mit $t_\nu \to \infty$ ergibt sich

$$1 \geq \delta_{sup}(r^{(0)}(k,k) + \ldots + r^{(\theta)}(k,k))$$

Da dies für alle θ gilt, ist

$$1 \geq \delta_{sup} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} r^{(t)}(k,k) = \delta_{sup} \cdot \mu_k$$

Sei nun θ so groß, daß

$$\sum_{t_o=\theta+1}^{\infty} r^{(t_o)}(k,k) < \varepsilon \qquad (\varepsilon>0)$$

ist und sei (t_ν) eine zunehmende Folge mit

$$\lim_{t_\nu \to \infty} p^{(t_\nu)}(k,k) = \delta_{inf}$$

Mit $t = t_\nu - a.b. \ldots .q - 1$ erhält man für hinreichend großes ν

$$1 \leq r^{(0)}(k,k)p^{(t)}(k,k) + \ldots + r^{(\theta)}(k,k)p^{(t-\theta)}(k,k) + \varepsilon$$

und damit in entsprechender Weise $1 \leq \delta_{inf} \cdot \mu_k$.

Aus $\mu_k \cdot \delta_{inf} \geq 1$ und $\mu_k \cdot \delta_{sup} \leq 1$ folgt unter Berücksichtigung der Definitionen für δ_{sup} und δ_{inf}

$$\delta_{sup} = \delta_{inf} = \lim_{t \to \infty} p^{(t)}(k,k) = \frac{1}{\mu_k}$$

Man verwendet diesen Hilfssatz zum Beweis von Satz 2 wie folgt (vgl. FELLER [38,S.291]):

Mit den Definitionen $f^{(0)}(i,k) := 0$; $p^{(0)}(k,k) := 1$ ist

$$p^{(t)}(i,k) = f^{(0)}(i,k)p^{(t)}(k,k) + f^{(1)}(i,k)p^{(t-1)}(k,k) + \ldots + f^{(t)}(i,k)p^{(0)}(k,k)$$

Für jedes feste τ gilt unter Bezugnahme auf den soeben bewiesenen Hilfssatz

$$\lim_{t \to \infty} f^{(\tau)}(i,k)p^{(t-\tau)}(k,k) = \frac{f^{(\tau)}(i,k)}{\mu_k}$$

Da die $p^{(t)}(k,k)$ beschränkt sind, unterscheidet sich $p^{(t)}(i,k)$ für genügend großes θ um eine beliebig kleine Größe von

$$p^{(t)}(i,k)' = p^{(t)}(k,k)f^{(0)}(i,k) + \ldots + p^{(t-\theta)}(k,k)f^{(\theta)}(i,k) \quad \text{mit}$$

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k)' = \frac{1}{\mu_k}\left(f^{(0)}(i,k) + f^{(1)}(i,k) + \ldots + f^{(\theta)}(i,k)\right)$$

Dies gilt für beliebig große θ; folglich ist

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,k) = \frac{1}{\mu_k}\left(f^{(0)}(i,k) + f^{(1)}(i,k) + \ldots\right) = \frac{1}{\mu_k}\left(\sum_{t=1}^{\infty} f^{(t)}(i,k)\right)$$

$$= \frac{F(i,k)}{\mu_k}$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Zu 5.2.4. (S.63).

Beweis

des Satzes: Gehört K_k zu der K_i zugeordneten abgeschlossenen Zustandsmenge und ist neben K_k auch K_i persistent, so gilt:

$$F(i,k) = 1$$

Wir benötigen zunächst folgenden Hilfssatz: Für die Wahrscheinlichkeit $g(i,i)$ dafür, daß, ausgehend vom (persistenten oder transienten) Zustand K_i, dieser Zustand bei unendlich vielen Übergängen unendlich oft durchlaufen wird, gilt:

$$g(i,i) = \lim_{t\to\infty} (F(i,i))^t$$

Dieser Satz kann nach PARZEN [116,S.215] wie folgt bewiesen werden: Sei $\theta_i(\tau)$ die Anzahl der bis nach dem τ-ten Übergang erfolgten Durchgänge durch den Zustand K_i sowie $W\left[\theta_i(\tau) = t \,/ i t_1\right]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\theta_i(\tau) = t$ gilt, wenn man weiß, daß nach t_1 Übergängen der Zustand K_i realisiert war. Unter Berücksichtigung dieser Definitionen gilt für $t \geq 1$:

$$W\left[\theta_i(\infty) \geq t \,/ i_o\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty} f^{(\nu)}(i,i).W\left[\theta_i(\infty) - \theta_i(\nu) \geq t-1 \,/ i_\nu\right]$$

("Methode des ersten Einganges", vgl. PARZEN [116,S.214])

Wegen

$$W\left[\theta_i(\infty) - \theta_i(\nu) \geq t-1 \,/i_\nu\right] = W\left[\theta_i(\infty) \geq t-1 \,/i_o\right]$$

ergibt sich für alle $t \geq 1$:

$$W\left[\theta_i(\infty) \geq t \,/i_o\right] = W\left[\theta_i(\infty) \geq t-1 \,/i_o\right] \cdot F(i,i)$$

und daraus mittels vollständiger Induktion nach t

$$W\left[\theta_i(\infty) \geq t \,/i_o\right] = (F(i,i))^t$$

sowie

$$\lim_{t\to\infty} W\left[\theta_i(\infty) \geq t \,/i_o\right] = \lim_{t\to\infty} (F(i,i))^t = g(i,i)$$

Damit ist der oben formulierte Hilfssatz bewiesen. Falls K_i persistent ist, hat man also

$$g(i,i) = \lim_{t\to\infty} 1^t = 1$$

Ist K_i Ausgangszustand, so erfolgt demnach mit Sicherheit bei unendlich vielen Übergängen eine Rückkehr zu diesem Zustand unendlich oft. Man kann jetzt die Behauptung leicht beweisen.

Da K_k von K_i aus erreichbar ist, existiert ein t' derart, daß $f^{(t')}(i,k) > 0$ gilt. K_i ist persistent, also erfolgt wegen des soeben bewiesenen Hilfssatzes unendlich oft eine Rückkehr zu K_i. Aus der Ungleichung

$$f^{(t')}(i,k) + (1-f^{(t')}(i,k))f^{(t')}(i,k) + (1-f^{(t')}(i,k))^2 f^{(t')}(i,k)$$

$$+ \ldots \leq F(i,k) \leq 1 \qquad \text{erhält man}$$

$$f^{(t')}(i,k) \cdot \frac{1}{1 - (1-f^{(t')}(i,k))} = 1 \leq F(i,k) \leq 1 \,;$$

deshalb ist $F(i,k) = 1$.

Zu 5.2.4. (S.63).

Beweis

des Satzes: Eine irreduzible MARKOVsche Kette erster Ordnung mit endlich vielen Zuständen enthält keinen transienten Zustand.

Angenommen, K_k sei ein transienter Zustand einer irreduziblen MARKOVschen Kette mit endlich vielen Zuständen. Dann muß, wegen der Endlichkeit der Zustandsmenge, ein persistenter Zustand existieren, wie schon aus Satz 1 (5.2.4. S.61) gefolgert wurde. Sei also K_i ein persistenter Zustand dieser Kette. K_k muß von K_i aus erreichbar sein, sonst wäre die K_i zugeordnete abgeschlossene Zustandsmenge eine echte Teilmenge der Menge aller Zustände und die Kette damit reduzibel. Ist aber K_k vom persistenten Zustand K_i aus erreichbar, so weisen die Folgen $\left\{ p^{(t)}(i,i) \right\}$ und $\left\{ p^{(t)}(k,k) \right\}$ dasselbe asymptotische Verhalten auf, wie weiter oben in diesem Anhang (S.157-158) bereits gezeigt wurde. Da K_i persistent ist und somit $F(i,i) = 1$ und $P(i,i) = \infty$ gilt (vgl. den Beweis von Satz 1 oben S.159 ff.), ist auch $P(k,k) = \infty$ und K_k wäre persistent. Dies widerspricht der Annahme, K_k sei transient.

Zu 5.2.5. (S.65).

Der HOWARD-Algorithmus

Wir definieren zunächst die erzeugende Funktion $\alpha_i(z)$ der Folge $a^{(0)}(i),\ldots,a^{(t)}(i),\ldots$ absoluter Wahlwahrscheinlichkeiten für den Zustand K_i:

$$\alpha_i(z) = \sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).z^t$$

Sie wird bei HOWARD als z-Transformierte der Folge $(a^{(t)}(i))$ bezeichnet und existiert für jede Folge, die nicht stärker als geometrisch zunimmt. Mit dieser Definition erhält man auf einfache Weise folgende Beziehungen:

(1) Die erzeugende Funktion der Folge $(a^{(t)}(i) + a^{(t)}(k))$ ist

$$\sum_{t=0}^{\infty} (a^{(t)}(i) + a^{(t)}(k)).z^t = \sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).z^t + \sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(k).z^t =$$

$$= \alpha_i(z) + \alpha_k(z)$$

(2) Die erzeugende Funktion der Folge $(d.a^{(t)}(i))$ mit d als Konstante lautet

$$\sum_{t=0}^{\infty} d.a^{(t)}(i).z^t = d.\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).z^t = d.\alpha_i(z)$$

(3) Die erzeugende Funktion der Folge $(a^{(t-1)}(i))$ mit $a^{(-1)}(i) := 0$ ist

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t-1)}(i).z^t = z.\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t-1)}(i).z^{t-1} = z.\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).z^t = z.\alpha_i(z)$$

(4) Als erzeugende Funktion der Folge $(a^{(t+1)}(i))$ ergibt sich

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t+1)}(i).z^t = \frac{1}{z} (\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).z^t - a^{(0)}(i)) = \frac{1}{z}(\alpha_i(z) - a^{(0)}(i))$$

(5) Für die geometrische Folge (d^t) ist

$$\sum_{t=0}^{\infty} d^t.z^t = \frac{1}{1 - dz} \quad ;$$

als erzeugende Funktion der Folge der natürlichen Zahlen ergibt sich

$$\sum_{t=0}^{\infty} t.z^t = \frac{1}{(1-z)^2}$$ (vgl. hierzu diesen Anhang S.155)

und damit für die Folge $(t.d^t)$

$$\sum_{t=0}^{\infty} t.d^t.z^t = \frac{1}{(1-dz)^2}$$

(6) Schließlich ist die erzeugende Funktion der Folge $(d^t.a^{(t)}(i))$

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).d^t.z^t = \sum_{t=0}^{\infty} a^{(t)}(i).(d.z)^t = \alpha_i(d.z)$$

Wir greifen jetzt zurück auf die Formel (V.3.) S.53:

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)}.M^t \quad ,$$

aus der sofort folgt:

$$\vec{a}^{(t+1)} = \vec{a}^{(t)} . \mathfrak{M}$$

Sei $\vec{\alpha}(z) := (\alpha_1(z),\ldots,\alpha_i(z),\ldots,\alpha_m(z))$ definiert als Vektor der erzeugenden Funktionen der Folgen $(a^{(t)}(1))$; ... ; $(a^{(t)}(i))$; ... ; $(a^{(t)}(m))$. Dann erhält man aus der zuletzt genannten Gleichung durch Übergang zu erzeugenden Funktionen unter Berücksichtigung der in (2) und (4) gefundenen Ergebnisse

$$\frac{1}{z}(\vec{\alpha}(z) - \vec{a}^{(0)}) = \vec{\alpha}(z) . \mathfrak{M} \quad ,$$

und daraus

$$\vec{\alpha}(z) - z.\vec{\alpha}(z).\mathfrak{M} = \vec{a}^{(0)}$$

$$\vec{\alpha}(z)(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M}) = \vec{a}^{(0)}$$

und schließlich

$$\vec{\alpha}(z) = \vec{a}^{(0)}(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M})^{-1} \quad ,$$

wobei $\mathfrak{F}_m$ die m-reihige Einheitsmatrix darstellt und $(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M})^{-1}$ immer existiert. Unterzieht man die Matrix $(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M})^{-1}$ der zur z-Transformation inversen Transformation, so ergeben sich wegen dieser Beziehung und wegen (2) oben die Übergangsmatrizen $\mathfrak{M}^t$.

Um $\vec{a}^{(t)}$, die Vektoren der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten, zu erhalten, braucht man also nur die Matrix zu bestimmen, deren z-Transformierte $(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M})^{-1}$ ist, und diese Matrix von links mit dem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten zu multiplizieren. Zur Durchführung der inversen z-Transformation ist, wie im Zusammenhang mit nachfolgenden Zahlenbeispielen klar wird, eine - hier stets mögliche - Zerlegung der Elemente der Matrix $(\mathfrak{F}_m - z.\mathfrak{M})^{-1}$ in Partialbrüche erforderlich.

Der Rechenaufwand bei diesem Algorithmus beschränkt sich also auf die Inversion einer m-reihigen Matrix (vgl. hierzu z. B. ZURMÜHL [173, S.30-35 und S.79-81]) und m^2 Partialbruchzerlegungen (z.B. SMIRNOV

[143 I, S.396-398]; FELLER [38,S.257-261]) für die Elemente der inversen Matrix. Zustandsklassifikationen brauchen zur Anwendung des Algorithmus nicht durchgeführt zu werden. Periodische Zustände erfordern zwar (vgl. HOWARD [77,S.15-16]) eine adäquate Interpretation der Ergebnisse des Rechenganges, sind aber für das hier zur Diskussion stehende Problem der Markenwahl nicht von Bedeutung (vgl. 5.2.3. S.61).

Die praktische Durchführung dieses Algorithmus wird am einfachsten anhand von numerischen Beispielen gezeigt.

Beispiel 1: Wir greifen zunächst zurück auf das Zahlenbeispiel 1 S. 154-156, bei dem eine MARKOVsche Kette mit der Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

gegeben war. Der Vektor der unbedingten Anfangswahrscheinlichkeiten sei

$$\vec{a}^{(0)} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) \quad .$$

(1) Ohne Verwendung des HOWARD-Algorithmus erhält man zunächst

(1a) $\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^t$, also beispielsweise

$$\vec{a}^{(2)} = \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^2 = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= (0{,}236,\ 0{,}744,\ 0{,}020)$$

(1b) unter Berücksichtigung von Satz 1 und Satz 2 im Abschnitt 5.2.4. S.61-62

$$\lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,1) = \frac{4}{19} \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,2) = \frac{15}{19}$$

$$\text{und} \quad \lim_{t\to\infty} p^{(t)}(i,3) = 0$$

für i=1,2,3; denn K_1 und K_2 sind persistent mit $\mathfrak{M}_1 = \frac{19}{4}$; $\mathfrak{M}_2 = \frac{19}{15}$ und $F(i,1) = F(i,2) = 1$; dagegen ist K_3 transient, wie in einem anderen Zusammenhang früher (S.154-155) nachgewiesen wurde.

(2) Auf sehr einfache Art und Weise liefert der HOWARD-Algorithmus dieselben Ergebnisse. Zunächst ist

$$(\mathfrak{J}_3 - z\mathfrak{M}) = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{3}{4}z & 0 \\ -\frac{1}{5}z & 1-\frac{4}{5}z & 0 \\ -\frac{2}{5}z & -\frac{2}{5}z & 1-\frac{1}{5}z \end{bmatrix}$$

woraus man, beispielsweise unter Zuhilfenahme des GAUSS-Algorithmus, erhält:

$$(\mathfrak{J}_3 - z\mathfrak{M})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\frac{4}{5}z}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)} & \frac{\frac{3}{4}z}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)} & 0 \\ \frac{\frac{1}{5}z}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)} & \frac{1-\frac{1}{4}z}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)} & 0 \\ \frac{\frac{2}{5}z(1-\frac{3}{5}z)}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)(1-\frac{1}{5}z)} & \frac{\frac{2}{5}z(1+\frac{1}{2}z)}{(1-z)(1-\frac{1}{20}z)(1-\frac{1}{5}z)} & \frac{1}{1-\frac{1}{5}z} \end{bmatrix}$$

Partialbruchzerlegung der Elemente dieser Matrix ergibt:

$$(\mathfrak{J}_3 - z\mathfrak{M})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\frac{4}{19}}{(1-z)} + \frac{\frac{15}{19}}{(1-\frac{1}{20}z)} & \cdot & \frac{\frac{15}{19}}{(1-z)} + \frac{-\frac{15}{19}}{(1-\frac{1}{20}z)} & 0 \\ \frac{\frac{4}{19}}{(1-z)} + \frac{-\frac{4}{19}}{(1-\frac{1}{20}z)} & & \frac{\frac{15}{19}}{(1-z)} + \frac{\frac{4}{19}}{(1-\frac{1}{20}z)} & 0 \\ \frac{\frac{4}{19}}{(1-z)} + \frac{-\frac{88}{57}}{(1-\frac{1}{20}z)} + \frac{\frac{4}{3}}{(1-\frac{1}{5}z)} & & \frac{\frac{15}{19}}{(1-z)} + \frac{\frac{88}{57}}{(1-\frac{1}{20}z)} + \frac{-\frac{7}{3}}{(1-\frac{1}{5}z)} & \frac{1}{(1-\frac{1}{5}z)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-z)} \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(1-\frac{1}{20}z)} \begin{bmatrix} \frac{15}{19} & -\frac{15}{19} & 0 \\ -\frac{4}{19} & \frac{4}{19} & 0 \\ -\frac{88}{57} & \frac{88}{57} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{(1-\frac{1}{5}z)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Unter Berücksichtigung der ersten oben unter (5) abgeleiteten Beziehung erhält man hieraus für allgemeines t durch inverse z-Transformation dieser Matrix

$$\mathfrak{A}^t = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \end{bmatrix} + (\tfrac{1}{20})^t \begin{bmatrix} \frac{15}{19} & -\frac{15}{19} & 0 \\ -\frac{4}{19} & \frac{4}{19} & 0 \\ -\frac{88}{57} & \frac{88}{57} & 0 \end{bmatrix} + (\tfrac{1}{5})^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und man sieht sofort, daß

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \end{bmatrix}$$

ist. Die Matrix $\mathfrak{M}^t$ setzt sich also zusammen aus der Grenzmatrix $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t$ und zwei von t abhängigen Matrizen, die auf Grund ihrer einfachen Form die Möglichkeit bieten, $\mathfrak{M}^t$ für endliche t beliebiger Größe sehr schnell zu berechnen. Beispielsweise erhält man für t=2:

$$\mathfrak{M}^2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \\ \frac{4}{19} & \frac{15}{19} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{400} \begin{bmatrix} \frac{15}{19} & -\frac{15}{19} & 0 \\ -\frac{4}{19} & \frac{4}{19} & 0 \\ -\frac{88}{57} & \frac{88}{57} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{17}{80} & \frac{63}{80} & 0 \\ \frac{21}{100} & \frac{79}{100} & 0 \\ \frac{13}{50} & \frac{7}{10} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

und damit $\vec{a}^{(2)} = \vec{a}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^2 = (0{,}236,\ 0{,}744,\ 0{,}020)$.

Da $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t$ aus gleichen Zeilenvektoren zusammengesetzt ist, sind die Grenzwerte $\vec{a}(i)$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten vom Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten unabhängig. Man erhält:

$$\vec{a} = (a(1),\ a(2),\ a(3)) = \vec{a}^{(0)} \lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t = \left(\frac{4}{19},\ \frac{15}{19},\ 0\right) .$$

Beispiel 2: Wir wenden jetzt den HOWARD-Algorithmus auf das numerische Beispiel 2 S.156 ff. an. Die Übergangsmatrix ist

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Außerdem sei der Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten gegeben mit

$$\vec{a}^{(0)} = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}) \quad .$$

Man erhält zunächst

$$(\mathfrak{F}_5 - z\mathfrak{M}) = \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{4}z & -\frac{1}{4}z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}z & 1-\frac{1}{2}z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{3}{8}z & -\frac{5}{8}z & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8}z & 1-\frac{7}{8}z & 0 \\ -\frac{3}{8}z & -\frac{1}{8}z & -\frac{1}{8}z & -\frac{1}{4}z & 1-\frac{1}{8}z \end{bmatrix}$$

und, durch Inversion dieser Matrix mittels des GAUSS-Algorithmus und Partialbruchzerlegung,

$$(\mathfrak{F}_5 - z\mathfrak{M})^{-1} = \frac{1}{1-z} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{(1-\frac{1}{8}z)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich durch inverse z-Transformation dieser Ausdrücke

$$\mathfrak{M}^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & 0 \end{bmatrix} + (\tfrac{1}{4})^t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (\tfrac{1}{8})^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

Im Gegensatz zu Beispiel 1 erhält man hier also keine Grenzmatrix mit gleichen Zeilenvektoren. $\{K_1, K_2\}$ und $\{K_3, K_4\}$ sind abgeschlossene minimale Mengen persistenter Zustände; deshalb sind die ersten beiden Zeilen sowie die Zeilen 3 und 4 gleich. Vom transienten Zustand K_5 aus sind Übergänge sowohl nach $\{K_1, K_2\}$ als auch nach $\{K_3, K_4\}$ möglich; deshalb ist der letzte Zeilenvektor von $\lim_{t \to \infty} \mathfrak{M}^t$ mit keinem anderen Zeilenvektor dieser Matrix identisch.

Die Grenzwerte a(i) der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten sind für dieses Beispiel also vom Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten abhängig. Es gilt:

$$\vec{a} = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0{,}343,\ 0{,}171,\ 0{,}081,\ 0{,}405)$$

Zu Abschnitt 5.4. (S.70).

Beweis

von Satz 1: Es sei eine MARKOVsche Kette mit der Zustandsmenge $K = \{K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_m\}$, dem Vektor $\vec{a}^{(0)} = (a^{(0)}(1), \ldots, a^{(0)}(m))$ der Anfangswahrscheinlichkeiten mit $a^{(0)}(i) \neq 0$ für alle i und der Matrix $\mathfrak{M} = (p(i,k))$ der Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben. Die Zustandsmenge K werde vermöge einer gegebenen Funktion $\varphi: K \to K^*$ auf die Zustandsmenge $K^* = \{K_1^*, \ldots, K_{i'}^*, \ldots, K_{m'}^*\}$ surjektiv abgebildet ($1 \leq m' \leq m$). Existieren keine aggregierten Zustände $K_i^* \in K^*$ mit einfachem Zugang, so liegt für die Zustandsmenge K^* bei beliebigem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten ($a^{(0)}(i) > 0$) genau dann wiederum eine MARKOVsche Kette vor, wenn

$$p(i,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1^*})} p(k,\nu)p(\nu,i_2^*) = p(k,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1^*})} p(i,\nu)p(\nu,i_2^*)$$

für alle K_i, $K_k \in K$ und $K_{i_1}^*, K_{i_2}^* \in K^*$ richtig ist.

Zunächst wird bewiesen, daß diese Bedingung für das Vorhandensein einer MARKOVschen Kette für die Zustandsmenge K^* notwendig ist.

Soll für K^* unabhängig vom Wert des Vektors $\vec{a}^{(0)}$ ebenfalls eine MARKOVsche Kette gegeben sein, so muß für alle $K_{i_o}^*, K_{i_1}^*, K_{i_2}^* \in K^*$ gelten:

$$W^{[0,2]}(K_{i_o}^*, K_{i_1}^*, K_{i_2}^*) = \sum_{K_i \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_o}^*)} \sum_{K_l \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1}^*)} a^{(0)}(i)p(i,l)p(l,i_2^*)$$

$$= W^{[0]}(K_{i_o}^*) \cdot W(K_{i_1}^*/K_{i_o}^*) \cdot W(K_{i_2}^*/K_{i_1}^*)$$

$$= \sum_{K_i \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_o}^*)} a^{(0)}(i) \cdot p(i,i_1^*) \frac{\sum_{\kappa=1}^{m} \sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1}^*)} a^{(0)}(\kappa)p(\kappa,\nu)p(\nu,i_2^*)}{\sum_{\kappa=1}^{m} a^{(0)}(\kappa)p(\kappa,i_1^*)}$$

Diese Größe ist wohldefiniert, solange ein K_i mit $p(i,i_1^*) > 0$ existiert, da wir $a^{(0)}(i) > 0$ für $i=1,\ldots,m$ vorausgesetzt haben.

Wir betrachten nun zwei Zustände $K_i, K_k \in K$, die vermöge φ auf verschiedene Elemente von K^* abgebildet werden und für die $p(i,i_1^*) > 0$ und $p(k,i_1^*) > 0$ richtig ist. Zwei solche Zustände existieren sicher, da vorausgesetzt wurde, daß keine Zustände aus K^* mit einfachem Zugang vorhanden sind. Läßt man nun alle $a^{(0)}(\kappa)$ mit $\kappa \neq i,k$ gegen Null gehen, so folgt aus obiger Beziehung

$$a^{(0)}(i) \sum_{K_l \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1}^*)} p(i,l)p(l,i_2^*) =$$

$$= a^{(0)}(i)p(i,i_1^*) \frac{\sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_{i_1}^*)} (a^{(0)}(i)p(i,\nu) + a^{(0)}(k)p(k,\nu))p(\nu,i_2^*)}{a^{(0)}(i)p(i,i_1^*) + a^{(0)}(k)p(k,i_1^*)} \qquad (*)$$

Dies kann für alle $a^{(0)}(i)$, $a^{(0)}(k)$ nur dann gelten, wenn

$$p(i,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_{i_1^*})} p(k,\nu)p(\nu,i_2^*) = p(k,i_1^*) \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_{i_1^*})} p(i,\nu)p(\nu,i_2^*) \qquad (**)$$

oder

$$p(k,i_1^*) = p(i,i_1^*) \frac{\Sigma\, p(k,\nu)p(\nu,i_2^*)}{\Sigma\, p(i,\nu)p(\nu,i_2^*)}$$

ist, weil man nur mit dieser Bedingung für die rechte Seite obiger Gleichung erhält:

$$a^{(0)}(i)p(i,i_1^*) \frac{\Sigma\,(a^{(0)}(i)p(i,\nu) + a^{(0)}(k)p(k,\nu))p(\nu,i_2^*)}{p(i,i_1^*)\dfrac{a^{(0)}(i)\,\Sigma p(i,\nu)p(\nu,i_2^*) + a^{(0)}(k)\,\Sigma p(k,\nu)p(\nu,i_2^*)}{\Sigma\, p(i,\nu)p(\nu,i_2^*)}} =$$

$$= a^{(0)}(i)\ \Sigma\ p(i,\nu)p(\nu,i_2^*)$$

Die Bedingung (**) gilt offensichtlich auch für $p(i,i_1^*) = 0$, also für alle K_i, $K_k \in K$ und $K_{i_1^*}$, $K_{i_2^*} \in K^*$.

Nun ist zu beweisen, daß (**) eine hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß für K^* eine MARKOVsche Kette vorliegt.

Wir definieren zunächst die Größe

$$Q(i^*,k^*) := \frac{\sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_i^*)} p(i,\nu)p(\nu,k^*)}{p(i,i^*)} \quad ,$$

die wegen (**) für alle $K_i \in K$ mit $p(i,i^*) > 0$ gleich ist.

Nun ist

$$w^{[0,T]}(K_{i_o^*},\ldots,K_{i_t^*},\ldots,K_{i_T^*}) =$$

$$= \sum_{K_{i_o} \in \vec{\varphi}^{-1}(K^*_{i_o})} \cdots \sum_{K_{i_T} \in \vec{\varphi}^{-1}(K^*_{i_T})} a^{(0)}(i_o). \ \ldots \ .p(i_{T-1}, i_T)$$

$$= \sum_{K_{i_o} \in \vec{\varphi}^{-1}(K^*_{i_o})} a^{(0)}(i_o) \frac{\sum_{K_{i_o} \in \vec{\varphi}^{-1}(K^*_{i_o})} a^{(0)}(i_o) p(i_o, i^*_1)}{\sum_{K_{i_o} \in \vec{\varphi}^{-1}(K^*_{i_o})} a^{(0)}(i_o)} Q(i^*_1, i^*_2). \ \ldots$$

$$\ldots .Q(i^*_{T-1}, i^*_T)$$

$$= W^{(0)}(K^*_{i_o}). \ \ldots \ .W(K^*_{i_T}/K^*_{i_{T-1}})$$

Also ist (* *) hinreichend.

Man erkennt aus diesem Gedankengang, daß die MARKOVsche Kette für $t \geq 1$ stationär sein muß, weil

$$Q(i^*, k^*) = W(K^*_k / K^*_i)$$

für $t \geq 1$ richtig ist.

Zu 5.4. (S.70).

Einige numerische Beispiele zur Illustration von Satz 1

Beispiel 1: Wir greifen zurück auf Beispiel 2 S.156 ff. und 174 ff. Gegeben ist eine MARKOVsche Kette mit der Zustandsmenge $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$, dem Vektor $\vec{a}^{(0)} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ der Anfangswahrscheinlichkeiten und der Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Wir bilden nun K mittels der Funktion $\varphi : K \to K^*$ wie folgt auf eine Zustandsmenge $K^* = \{K_1^*, K_2^*\}$ ab:

$K_i \rightsquigarrow K_1^*$ für i=1,2,3;
$K_i \rightsquigarrow K_2^*$ für i=4,5;

d.h., wir fassen die Zustände (Marken) K_1, K_2, K_3 sowie die Zustände K_4, K_5 zu je einer Zustandsmenge (Markengruppe) zusammen. K_1^* und K_2^* sind, wie man leicht einsieht, keine Zustandsgruppen mit einfachem Zugang. Für K^* hat man keine MARKOVsche Kette, denn beispielsweise gilt, falls i=4; k=5; $K_{i_1}^* = K_2^*$; $K_{i_2}^* = K_2^*$,

$$p(4,2^*) \quad \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_2^*)} p(5,\nu)p(\nu,2^*) = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}\right) = \frac{119}{512}$$

$$\neq p(5,2^*) \quad \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_2^*)} p(4,\nu)p(\nu,2^*) = \frac{3}{8}\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8} + 0\right) = \frac{147}{512} ;$$

die Bedingung von Satz 1 ist also nicht erfüllt.

Beispiel 2: Eine MARKOVsche Kette mit 4 Zuständen habe die Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Mittels der Abbildung φ wird die Menge $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ wie folgt auf eine neue Zustandsmenge $K^* = \{K_1^*, K_2^*\}$ abgebildet:

K_1, $K_2 \rightsquigarrow K_1^*$
K_3, $K_4 \rightsquigarrow K_2^*$

Die Menge K^* enthält keine Zustände mit einfachem Zugang, die Voraus-

setzung des Satzes 1 ist also gegeben. Auch die in Satz 1 enthaltene Bedingung für die Existenz einer MARKOVschen Kette für K^* ist offensichtlich trivialerweise wegen der Gleichheit der Elemente der Übergangsmatrix und der Gruppierung von je 2 Zuständen erfüllt. Wie man leicht sieht, läßt sich die gegebene MARKOVsche Kette mit Bezug auf die Zustandsmenge K^* durch die Matrix

$$\mathfrak{M}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ausdrücken.

Numerische Beispiele MARKOVscher Ketten, die nicht allzu trivial sind und bei entsprechender Zustandsgruppierung die Bedingung von Satz 1 erfüllen, sind schwer zu finden.

Zu Abschnitt 5.4. (S.70-71).

Beweis
======

von Satz 2: Die Zustandsmenge $K = \{K_1,\ldots,K_{m'-1},K_{m'},\ldots,K_m\}$ einer MARKOVschen Kette werde vermöge einer Funktion φ wie folgt auf die Zustandsmenge $K^* = \{K_1,\ldots,K_{m'-1},K^*_{m'}\}$ abgebildet:

$$\varphi: K \to K^* \;\Big|\; \begin{matrix} K_i \rightsquigarrow K_i & \text{für } 1 \leq i < m' \\ K_i \rightsquigarrow K^*_{m'} & \text{für } m' \leq i \leq m \end{matrix}$$

Für die Zustandsmenge K^* hat man unter diesen Voraussetzungen bei beliebigem Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten mit $a^{(0)}(i) > 0$ genau dann wiederum eine MARKOVsche Kette, wenn

(1) entweder $\sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,k) = p(i,m'^*)p(m'^*,k)$

für alle $K_k \notin \varphi^{-1}(K^*_{m'})$ und alle K_i

(2) oder $p(i,m'^*) = 0$

für alle $K_i \notin \varphi^{-1}(K^*_{m'})$

erfüllt ist.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Bedingung aus Satz 2 hinreichend ist. Es wird gezeigt, daß für die Wahrscheinlichkeit $w^{[0,T]}(K_i, K^*_{m'}, \ldots, K^*_{m'}, K_k)$ dafür, daß die Zustände K_i, $K^*_{m'}, \ldots, K^*_{m'}$, K_k in dieser Reihenfolge im Verlauf von T Versuchen auftreten ($K_i \in K$; $K_k \in K/\overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})$), die Beziehung

$$w^{[0,T]}(K_i, K^*_{m'}, \ldots, K^*_{m'}, K_k) = a^{(0)}(i).W(K^*_{m'}/K_i).W(K^*_{m'}/K^*_{m'}). \ldots .W(K^*_{m'}/K_k)$$

gilt, und zwar unabhängig vom Vektor $\vec{a}^{(0)}$ der Anfangswahrscheinlichkeiten.

Aus Satz 2 folgt durch Summierung über k für alle $K_k \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})$

$$\sum_{K_k \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} \sum_{K_\nu \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,k) = \sum_{K_k \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} p(i,m'^*)p(m'^*,k)$$

$$1 - \sum_{K_\nu \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,m'^*) = 1 - p(i,m'^*)p(m'^*,m'^*)$$

$$\sum_{K_\nu \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,m'^*) = p(i,m'^*)p(m'^*,m'^*)$$

für alle $K_i \in K$. Verwendet man diese Gleichung für die obige Beziehung, so erhält man

$$w^{[0,T]}(K_i, K^*_{m'}, \ldots, K^*_{m'}, K_k) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{K_{i_t} \in \overset{-1}{\varphi}(K^*_{m'})} a^{(0)}(i)p(i,i_1). \ldots .p(i_{t-1},i_t). .p(i_{T-1},k)$$

$$= a^{(0)}(i)p(i,m'^*)\left[p(m'^*,m'^*)\right]^{T-2} p(m'^*,k)$$

$$= a^{(0)}(i).W(K^*_{m'}/K_i). \ldots .W(K^*_{m'}/K^*_{m'}). \ldots .W(K_k/K^*_{m'})$$

Satz 2 gibt also eine hinreichende Bedingung dafür an, daß für K^* eine MARKOVsche Kette vorliegt.

Es wird jetzt vorausgesetzt, daß für K^* eine MARKOVsche Kette vorliegt. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

(1) $p(1,m'^*) = 0$ für alle $K_1 \in K$. Dann ist Gleichung (1) von Satz 2 offensichtlich erfüllt.

(2) Es existiert ein $K_1 \in K^*/K^*_{m'}$ mit $p(1,m'^*) \neq 0$. Dann gilt ($a^{(0)}(i) > 0$ für alle $i=1,\ldots,m$)

$$p(1,m'^*)\,\frac{\sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K^*_{m'})} \sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i)p(i,\nu)p(\nu,k)}{\sum_{i=1}^{m} a^{(0)}(i)p(i,m'^*)} = \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K^*_{m'})} p(1,\nu)p(\nu,k)$$

für alle K_1, $K_k \in K^*/K^*_{m'}$.

(2a) Ist K_i derart, daß $p(i,m'^*) \neq 0$ ist, dann gilt

$$p(1,m'^*) \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K^*_{m'})} p(i,\nu)p(\nu,k) = p(i,m'^*) \sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K^*_{m'})} p(1,\nu)p(\nu,k)$$

für alle K_1, $K_k \in K^*/K^*_{m'}$, was nachgewiesen werden kann, indem man $a^{(0)}(i)$ gegen 1 gehen läßt (vgl. den Beweis zu Satz 1 S.178).

(2b) Ist K_i derart, daß $p(i,m'^*) = 0$ ist, dann gilt diese letztere Beziehung offensichtlich.

Existiert also ein $K_1 \in K^*/K^*_{m'}$ mit $p(1,m'^*) \neq 0$, so gilt diese Beziehung für alle $K_i \in K$ und alle $K_1 \in K^*/K^*_{m'}$. Daraus folgt offensichtlich Gleichung (1) aus Satz 2 für diese Fälle.

(3) Es gilt $p(1,m'^*) = 0$ für alle $K_1 \in K^*/K^*_{m'}$; dann hat man Gleichung (2) von Satz 2.

Satz 2 gibt also eine notwendige Bedingung dafür an, daß für K^* eine MARKOVsche Kette gegeben ist.

Zu Abschnitt 5.4.(S.71).

Einige numerische Beispiele zur Illustration von Satz 2

Beispiel 1: Wir greifen zurück auf Beispiel 1 S.154-156 und 171-174. Gegeben sei also eine MARKOVsche Kette mit der Zustandsmenge $K = \{K_1, K_2, K_3\}$, dem - hier irrelevanten - Vektor $\vec{a}^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ der Anfangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

a) Wir fassen nun K_2 und K_3 zu einer Zustandsgruppe K_2^* zusammen, bilden also K mittels $\varphi : K \to K^*$ wie folgt auf die neue Zustandsmenge $K^* = \{K_1, K_2^*\}$ ab:

$K_1 \rightsquigarrow K_1$
$K_2, K_3 \rightsquigarrow K_2^*$

K_1 bleibt also als einziger Zustand ungruppiert.

Für K^* liegt keine MARKOVsche Kette vor, denn weder Gleichung (1) noch Gleichung (2) von Satz 2 sind erfüllt. Es existieren nämlich

(1) $K_1 \notin \bar{\varphi}^{-1}(K_2^*)$ und $K_2, K_3 \in K$ mit

$$\frac{\sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_2^*)} p(2,\nu)p(\nu,1)}{p(2,2^*)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+0}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \neq \frac{\sum_{K_\nu \in \bar{\varphi}^{-1}(K_2^*)} p(3,\nu)p(\nu,1)}{p(3,2^*)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{15}$$

(2) $K_1 \notin \bar{\varphi}^{-1}(K_2^*)$ mit $p(1,2^*) = \frac{3}{4} > 0$

b) Wir fassen nun anders als in a) K_1 und K_2 zu einer Zustandsgruppe K_2^* zusammen, bilden also K mittels $\varphi : K \to K^*$ wie folgt auf die neue Zustandsmenge $K^* = \{K_2^*, K_3\}$ ab:

$K_1,\ K_2 \rightsquigarrow K_2^*$
$K_3 \rightsquigarrow K_3$

Dann hat man für K^* eine MARKOVsche Kette, denn Gleichung (1) von Satz 2 ist offensichtlich erfüllt, weil ein Übergang von K_1 und K_2 nach K_3 und damit auch von K_2^* nach K_3 unmöglich ist.

Beispiel 2: (Vgl. BURKE und ROSENBLATT [15,S.1117-1118]). Eine MARKOVsche Kette mit 5 Zuständen habe die Übergangsmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Die Zustandsmenge $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$ werde durch $\varphi : K \to K^*$ wie folgt auf die Menge $K^* = \{K_1, K_2, K_3^*\}$ abgebildet:

$K_1 \rightsquigarrow K_1$
$K_2 \rightsquigarrow K_2$
$K_i \rightsquigarrow K_3^*$ für $3 \leq i \leq 5$

Dann ist Gleichung (1) von Satz 2 erfüllt, denn

$$\frac{\sum_{K_\nu \in \varphi^{-1}(K_3^*)} p(i,\nu)p(\nu,k)}{p(i,3^*)} = \frac{1}{6} = p(3^*,k)$$

für alle K_i und alle $K_k \in \varphi^{-1}(K_3^*)$.

Zu 5.5.1. (S.75).

Ein numerisches Beispiel zur Aggregation individueller Markenwahlprozesse mittels durchschnittlicher Anfangsvektoren und Übergangsmatrizen

Eine Volkswirtschaft bestehe aus 2 Haushalten. Die Prozesse der Markenwahl für ein bestimmtes Konsumgut K, das in Form von 2 Marken K_1, K_2 angeboten wird, sind gegeben durch

$$\vec{a}_1(0) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) \qquad \vec{a}_2(0) = (\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{8})$$

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \qquad \mathfrak{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Man erhält beispielsweise:

$$\vec{a}_1(2) = \vec{a}_1(0).\mathfrak{M}_1^{\,2} = (\tfrac{19}{64}, \tfrac{45}{64}) \qquad \vec{a}_2(2) = \vec{a}_2(0).\mathfrak{M}_2^{\,2} = (\tfrac{85}{128}, \tfrac{43}{128})$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1(0).\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}_1^{\,t} = (\tfrac{3}{10}, \tfrac{7}{10}) \qquad \vec{a}_2 = \vec{a}_2(0).\lim_{t\to\infty} \mathfrak{M}_2^{\,t} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

Die Marktanteile der beiden Marken K_1 und K_2 betragen also erwartungsgemäß

a) in der zweiten Markenwahlperiode wegen (V.22.) mit $\tau=1$; $T=1$:

$$E\,A^{[2,2]}(1) = \bar{a}^{(2)}(1) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{19}{64} + \tfrac{85}{128}) = \tfrac{123}{256} \qquad \text{bzw.}$$

$$E\,A^{[2,2]}(2) = \bar{a}^{(2)}(2) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{45}{64} + \tfrac{43}{128}) = \tfrac{133}{256}$$

b) im allgemeinen stationären Endzustand wegen (V.23.):

$$E\,A^{[T]}(1) = \bar{a}(1) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{3}) = \tfrac{29}{60} \qquad \text{bzw.}$$

$$E\,A^{[T]}(2) = \bar{a}(2) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{10} + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{31}{60}$$

Wir setzen nun

$$\vec{a}(0) = \frac{1}{2}(\vec{a}_1(0) + \vec{a}_2(0)) = (\frac{7}{16}, \frac{9}{16})$$

und

$$\overline{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Man erhält:

$$\vec{a}(0) \cdot \overline{\mathfrak{M}}^2 = (\frac{7}{16}, \frac{9}{16}) \neq (\frac{123}{256}, \frac{133}{256})$$

$$\vec{a}(0) \cdot \lim_{t \to \infty} \overline{\mathfrak{M}}^t = (\frac{7}{16}, \frac{9}{16}) \neq (\frac{29}{60}, \frac{31}{60}) \quad ,$$

also eine MARKOVsche Kette, die sich schon ab t = 0 im stationären Endzustand befindet und keine modellentsprechenden Marktanteilsprognosen liefert.

Zu 5.5.1.(S.77).

Berechnung der Anzahl der Zustände der Zustandsmenge $\mathfrak{H}^*$

Die gesuchte Anzahl von Zuständen sei Z(N,m). Offensichtlich ergibt sie sich als Antwort auf die Fragestellung: Auf wieviele Arten kann man N nicht unterscheidbare Kugeln auf m unterscheidbare Urnen verteilen? Es gilt:

$$Z(N,m) = Z(N,m-1) + Z(N-1,m-1) + \ldots + Z(1,m-1) + Z(0,m-1)$$

$$= \sum_{r=0}^{N} Z(N-r,m-1) \quad ,$$

denn wenn man in der ersten Urne r Kugeln hat, dann sind N-r Kugeln nur noch auf m-1 Urnen zu verteilen; r kann dabei die Werte 0,1,...,N annehmen. Außerdem hat man, wie leicht ersichtlich ist, Z(N,1) = 1 für N = 0,1,2,... und Z(0,m) = 1 für m = 1,2,... . Obige Rekursionsbeziehung liefert bei diesen Anfangsbedingungen das Ergebnis

$$Z(N,m) = \binom{N+m-1}{N} \quad ;$$

dabei gilt: $m^N > \binom{N+m-1}{N}$ für $N > 1$, $m \geq 1$.

Zu 5.5.1. (S.77).

Ein einfaches Beispiel zur Darstellung mehrerer simultaner Markenwahlprozesse mit individuellen Anfangs- und Übergangswahrscheinlichkeiten durch eine einzige MARKOVsche Kette

Wie beim oben S.187-188 dargestellten Beispiel bestehe die Volkswirtschaft aus 2 Haushalten; das Konsumgut K werde in 2 Marken angeboten; die individuellen Markenwahlprozesse seien gegeben durch

$$\vec{a}_1(0) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) \qquad \vec{a}_2(0) = (\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{8})$$

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \qquad \mathfrak{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wir definieren mittels dieser Angaben eine MARKOVsche Kette mit der Zustandsmenge $\mathfrak{K} = \{ K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} \}$, wobei K_{ik} definiert sei als der Verbrauchszustand der Volkswirtschaft, der gekennzeichnet ist durch den Konsum der Marke K_i beim ersten und der Marke K_k beim zweiten Haushalt (i,k=1,2).

Dann ist für diese MARKOVsche Kette

$$\vec{a}(0) = (\tfrac{5}{32}, \tfrac{3}{32}, \tfrac{15}{32}, \tfrac{9}{32}) \qquad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & \frac{21}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{9}{32} & \frac{3}{32} & \frac{15}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

woraus durch Multiplikation bzw. unter Zuhilfenahme des HOWARD-Algorithmus folgt:

$$\vec{a}^{(2)} = \left(\frac{1615}{8192}, \frac{817}{8192}, \frac{3825}{8192}, \frac{1935}{8192}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{7}{15}, \frac{7}{30}\right)$$

Hieraus findet man leicht die schon auf S.187 auf andere Weise errechneten erwartungsgemäßen Marktanteile folgendermaßen:

$$E\,A^{[2,2]}(1) = 1.\frac{1615}{8192} + \frac{1}{2}\left(\frac{817+3825}{8192}\right) = \frac{123}{256}$$

$$E\,A^{[2,2]}(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{817+3825}{8192}\right) + 1.\frac{1935}{8192} = \frac{133}{256}$$

$$E\,A^{[1]}(1) = 1.\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{7}{15}\right) = \frac{29}{60}$$

$$E\,A^{[1]}(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{7}{15}\right) + \frac{7}{30} = \frac{31}{60}$$

Bildet man die Zustandsmenge $\mathcal{K} = \{K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}\}$ auf eine Zustandsmenge $\mathcal{K}^* = \{K_{11}, K^*_{1/1}, K_{22}\}$ mit

$$K_{11} \rightsquigarrow K_{11}$$
$$K_{12}, K_{21} \rightsquigarrow K^*_{1/1}$$
$$K_{22} \rightsquigarrow K_{22}$$

ab, so hat man für $\mathcal{K}^*$ keine MARKOVsche Kette, weil, wie man leicht nachprüft, weder die Bedingung von Satz 1 noch eine der Bedingungen von Satz 2 des Abschnitts 5.4. (S.70-71) erfüllt ist. Satz 2 ist natürlich nicht allgemein, sondern nur für dieses vereinfachte Zahlenbeispiel verwendbar.

Zu 5.5.2.(S.81).

Der HOWARD-Algorithmus für MARKOVsche Prozesse mit stetiger Zeitachse

Wir definieren zunächst die LAPLACE-Transformierte $\alpha_i(s)$ einer Zeitfunktion $a_i(t)$, die für $t < 0$ verschwindet, wie folgt:

$$\alpha_i(s) = \int_0^\infty a_i(t).e^{-st}\,dt$$

Sie existiert für jede Zeitfunktion $a_i(t)$, die nicht stärker als exponentiell zunimmt. Mit dieser Definition erhält man unter anderem

folgende Beziehungen:

(1) Die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion $(a_i(t) + a_k(t))$ ist

$$\int_0^\infty (a_i(t) + a_k(t)).e^{-st}\,dt = \int_0^\infty a_i(t).e^{-st}\,dt + \int_0^\infty a_k(t).e^{-st}\,dt$$

$$= \alpha_i(s) + \alpha_k(s)$$

(2) Die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion $d.a_i(t)$ mit d als Konstante lautet

$$\int_0^\infty d.a_i(t).e^{-st}\,dt = d.\int_0^\infty a_i(t).e^{-st}\,dt = d.\alpha_i(s)$$

(3) Die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion $\frac{d}{dt}\,a_i(t)$ ist

$$\int_0^\infty (\tfrac{d}{dt}\,a_i(t)).e^{-st}\,dt = a_i(t).e^{-st}\Big|_0^\infty + s.\int_0^\infty a_i(t).e^{-st}\,dt$$

$$= s\,\alpha_i(s) - a_i(0)$$

(4) Als LAPLACE-Transformierte der Funktion $e^{-d.t}$ erhält man

$$\int_0^\infty e^{-d.t}.e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(d+s)t}\,dt = \frac{-1}{d+s}\,e^{-(d+s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{d+s}$$

(5) Die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion $t.e^{-d.t}$ ist

$$\int_0^\infty t.e^{-d.t}.e^{-st}\,dt = \int_0^\infty t.e^{-(d+s)t}\,dt$$

$$= -\frac{t.e^{-(d+s)t}}{d+s}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(d+s)t}}{d+s}\,dt$$

$$= -\frac{e^{-(d+s)t}}{(d+s)^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(d+s)^2}$$

(6) Schließlich ist die LAPLACE-Transformierte der Zeitfunktion $e^{-d.t}.a_i(t)$

$$\int_0^\infty e^{-d.t}.a_i(t).e^{-st}\,dt = \int_0^\infty a_i(t).e^{-(d+s)t}\,dt = \alpha_i(d+s)$$

Wir verwenden jetzt das Differentialgleichungssystem (V.24) S.90:

$$\frac{d}{dt}\,\vec{a}(t) = \vec{a}(t).\mathcal{R} \qquad ;$$

seine Lösung ist offensichtlich

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(0).e^{\mathcal{R}.t} \quad ,$$

wenn man

$$e^{\mathcal{R}.t} = \mathcal{J}_m + t.\mathcal{R} + \frac{t^2}{2!}\mathcal{R}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathcal{R}^3 + \ldots$$

setzt.

Definiert man $\vec{\alpha}(s) := (\alpha_1(s),\ldots,\alpha_i(s),\ldots,\alpha_m(s))$ als Vektor der LAPLACE-Transformierten der Zeitfunktionen $a_1(t);\ldots;\ a_i(t);\ldots;\ a_m(t)$, so erhält man aus der Gleichung (V.24) durch Übergang zu LAPLACE-Transformierten unter Berücksichtigung der unter (2) und (3) gefundenen Ergebnisse

$$s.\vec{\alpha}(s) - \vec{a}(0) = \vec{\alpha}(s).\mathcal{R} \qquad \text{oder}$$

$$\vec{\alpha}(s)(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R}) = \vec{a}(0)$$

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{a}(0)(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1} \quad ,$$

wobei $(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1}$ immer existiert. Unterzieht man die Matrix $(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1}$ der zur LAPLACE-Transformation inversen Transformation, so ergeben sich also die Größen $e^{\mathcal{R}.t}$.

Zur Berechnung von $\vec{a}(t)$, also der Vektoren absoluter Verbrauchswahrscheinlichkeiten zu den Zeitpunkten t, muß man demnach nur die Matrix bestimmen, deren LAPLACE-Transformierte $(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1}$ ist, und diese Matrix von links mit dem Vektor $\vec{a}(0)$ der Anfangswahrscheinlichkeiten multiplizieren. Der Rechengang ist analog zur Anwendung des HOWARD-Algorithmus bei MARKOVschen Ketten mit diskreter Zeitachse. Auch hier sind eine Matrixinversion und zur Durchführung der zur LAPLACE-Transformation inversen Transformation eine Zerlegung der Elemente der Ma-

trix $(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1}$ in Partialbrüche erforderlich. Der Rechengang wird am einfachsten an einem Zahlenbeispiel erläutert.

Ein Konsumgut K werde in 2 konkurrierenden Marken K_1 und K_2 angeboten. Das Markenverbrauchsverhalten aller Haushalte sei charakterisiert durch den Anfangsvektor

$$\vec{a}(0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

und die Differentialmatrix

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -8 & +8 \\ +2 & -2 \end{bmatrix}$$

Man erhält:

$$(s\mathcal{J}_2 - \mathcal{R}) = \begin{bmatrix} s+8 & -8 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix}$$

und daraus

$$(s\mathcal{J}_2 - \mathcal{R})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+8)(s+2)-16} & \frac{+8}{(s+8)(s+2)-16} \\ \frac{+2}{(s+8)(s+2)-16} & \frac{s+8}{(s+8)(s+2)-16} \end{bmatrix}$$

Partialbruchzerlegung der Elemente dieser Matrix ergibt

$$(s\mathcal{J}_2 - \mathcal{R})^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{s+10}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Unter Berücksichtigung der oben unter (4) abgeleiteten Beziehung kann man die zur LAPLACE-Transformation inverse Transformation leicht durchführen und erhält

$$e^{\mathcal{R}.t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + e^{-10t}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Die Matrix $e^{\mathcal{R}.t}$ setzt sich also zusammen aus einer von t unabhängigen stochastischen Matrix und einer Differentialmatrix, die für $t \to \infty$ verschwindet.

Absolute Verbrauchswahrscheinlichkeiten $\vec{a}(t)$ können mit diesem Ausdruck für $e^{\mathcal{R}.t}$ leicht errechnet werden. Man erhält beispielsweise

$$\vec{a}(0,5) = \vec{a}(0).e^{0,5.\mathcal{R}} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).e^{-5} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}) + e^{-5}(\tfrac{3}{10}, -\tfrac{3}{10}) \approx (0{,}202,\ 0{,}798)$$

und natürlich

$$\lim_{t \to \infty} \vec{a}(t) = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}) \quad .$$

Unter Verwendung der Formeln (V.25.) und (V.26.) kann man für dieses numerische Beispiel auch Erwartungswerte für Marktanteile berechnen. Man erhält zum Beispiel

$$E\, A^{[0,4]}(1) = \frac{1}{4} \int_0^4 a_1(t)\, dt = \frac{1}{4} \int_0^4 (\tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{10}\, e^{-10t})\, dt = \frac{1}{5} - \frac{3}{400}\, (e^{-40} - 1)$$

$$\approx 0{,}2075$$

$$E\, A^{[0,4]}(2) = \frac{1}{4} \int_0^4 a_2(t)\, dt = \frac{1}{4} \int_0^4 (\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{10}\, e^{-10t})\, dt = \frac{4}{5} + \frac{3}{400}\, (e^{-40} - 1)$$

$$\approx 0{,}7925$$

und für den stationären Endzustand

$$E\, A^{[\infty]}(1) = \frac{1}{5}\ ; \qquad E\, A^{[\infty]}(2) = \frac{4}{5} \quad .$$

ERGÄNZUNGEN ZU KAPITEL 3: LERNTHEORETISCH FUNDIERTE ENTSCHEIDUNGS-
MODELLE ZUR ABSATZPOLITIK VON UNTERNEHMUNGEN

Zu 7.1.2. (S.103-104).

Berechnung des erwartungsgemäßen diskontierten Gewinns einer Unternehmung bei vorgegebener Übergangsmatrix

Aus der Darstellung des HOWARD-Algorithmus für eine MARKOVsche Kette mit diskontinuierlicher Zeitachse (vgl. S.168 ff.) ist bekannt, daß die Vektoren $\vec{a}^{(t)}$ der absoluten Wahlwahrscheinlichkeiten bestimmt werden können, indem man die inverse z-Transformierte der Größe

$$\alpha(z) = \vec{a}^{(0)}(\mathcal{J}_m - z\mathcal{M})^{-1}$$

errechnet.

Wir bezeichnen die inverse z-Transformierte des Ausdrucks $(\mathcal{J}_m - z\mathcal{M})^{-1}$ mit $\mathcal{G}(t)$, so daß gilt:

$$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}^{(0)} \cdot \mathcal{G}(t)$$

Es ist außerdem aus der allgemeinen Diskussion des HOWARD-Algorithmus bekannt, daß $\mathcal{G}(t)$ dargestellt werden kann als Summe aus zwei Ausdrücken, nämlich (vgl. auch HOWARD [77,S.12])

(1) einer stochastischen Matrix, die die Grenz-Übergangswahrscheinlichkeiten enthält und in der die Größe t nicht vorkommt; diese stochastische Matrix sei mit $\mathcal{T}$ bezeichnet;

(2) einer Summe von Differentialmatrizen, die geometrische Koeffizienten haben, welche mit $t \to \infty$ gegen Null streben; diese Summe werde mit $\mathcal{H}(t)$ ausgedrückt.

Wir haben also die Beziehung

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{T} + \mathcal{H}(t) \quad ;$$

dabei sind γ und $7(t)$ leicht auszurechnen. Unter Verwendung von Gleichung (VII.2.) S.103 erhält man

$$E\,G_k = N.(q_k^{[0]} - \gamma_k).\sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)}.\gamma.{}^{t}\vec{e}_k.\alpha^t + \\ + N(q_k^{[0]} - \gamma_k).\sum_{t=1}^{\infty} \vec{a}^{(0)}.7(t).{}^{t}\vec{e}_k.\alpha^t$$

Wegen der auftretenden geometrischen Koeffizienten unter den beiden Summenzeichen macht die Berechnung von $E\,G_k$ keine Schwierigkeiten.

Zu 7.1.2. (S.103-104).

Ein numerisches Beispiel zur Preispolitik einer Unternehmung

Ein Konsumgut K werde in Form von 2 Marken K_1 und K_2 angeboten. Für die Unternehmung, die K_1 herstellt, betragen die gesamten Kosten einer Mengeneinheit $\gamma_1 = 1{,}00$ DM ; der Preis für eine Einheit beträgt zunächst $q_1 = 1{,}25$ DM ; die Unternehmung erwäge eine Preissenkung um 0,05 DM, also auf $q_1' = 1{,}20$ DM . Der Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten betrage $\vec{a}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei ursprünglich

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \quad ;$$

nach Einschätzung der Unternehmensleitung werde sie durch die geplante Preissenkung geändert auf

$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Es soll geprüft werden, ob sich die Preissenkung gewinnsteigernd oder gewinnmindernd auswirkt ($\alpha = 0{,}95$).

Wir betrachten zunächst die Ausgangsmatrix $\mathfrak{M}$. Man erhält, wenn man

mit dem HOWARD-Algorithmus arbeitet:

$$(\mathcal{I}_2 - z\mathcal{M})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \frac{1}{1+\frac{1}{8}z}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad ;$$

schließlich ergibt sich, wenn man die zur z-Transformation inverse Transformation durchführt,

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{T} + \mathcal{T}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + (-\tfrac{1}{8})^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Als auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten Gesamtgewinn G_1 unter den Ausgangsbedingungen erhält man erwartungsgemäß:

$$E\,G_1 = N.0{,}25.\sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$+ N.0{,}25.\sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{8})^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$= 0{,}25.N\left[\sum_{t=1}^{\infty} \tfrac{1}{3}.0{,}95^t + \sum_{t=1}^{\infty} \tfrac{1}{6}.(-\tfrac{1}{8})^t.0{,}95^t\right]$$

$$= 0{,}25.N(\tfrac{19}{3} - \tfrac{19}{1074}) \approx 1{,}58N$$

Rechnet man mit der Matrix $\mathcal{M}'$, also der Matrix, die die Markenübergänge der Haushalte nach Änderung des Preises q_1 auf $q_1' = 1{,}20$ charakterisiert, dann erhält man

$$(\mathcal{I}_2 - z\mathcal{M}')^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} + \frac{1}{1+\frac{1}{6}z}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad ;$$

daraus folgt:

$$\mathfrak{P}'(t) = \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} + (-\tfrac{1}{6})^t \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Der auf t=0 diskontierte Gesamtgewinn G_1' beträgt unter den in Erwägung gezogenen Bedingungen erwartungsgemäß

$$E\,G_1' = N.0,20. \sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} .0,95^t$$

$$+ N.0,20. \sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{6})^t \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} .0,95^t$$

$$= 0,20N \left[\sum_{t=1}^{\infty} \tfrac{3}{7}.0,95^t + \sum_{t=1}^{\infty} \tfrac{1}{14}(-\tfrac{1}{6})^t .0,95^t \right]$$

$$= 0,20N(\tfrac{57}{7} - \tfrac{19}{1946}) \approx 1,63N$$

Wegen $E\,G_1' > E\,G_1$ ist die beabsichtigte Preisänderung durchzuführen.

Zu 7.2.2.(S.107).

Ein numerisches Beispiel zur Werbepolitik einer Unternehmung

Ein Konsumgut K werde wiederum in Form von 2 Marken K_1 und K_2 angeboten. Die Stückkosten der Marke K_1 ohne Werbekosten betragen γ_1 = = 0,90 DM ; der Preis für eine Einheit dieser Marke, dessen Änderung nicht zur Diskussion steht, sei q_1 = 1,25 DM ; die Unternehmung erwäge eine Änderung des Werbebudgets. Statt wie bisher $b_1 = 3,15.10^5$ DM sollen jetzt $b_1' = 6.10^5$ DM je Markenwahlperiode eingesetzt werden. Der Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten betrage $\vec{a}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei zunächst

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} ;$$

nach Einschätzung der Unternehmensleitung werde sie durch die geplante Erhöhung des Werbebudgets geändert auf

$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \end{bmatrix} ;$$

der Abzinsungsfaktor sei wiederum $\alpha = 0,95$; außerdem seien $N = 10^7$ das Konsumgut K nachfragende Haushalte vorhanden. Zu prüfen ist die Auswirkung der erwogenen Änderung des Werbebudgets auf die Gewinnlage der Unternehmung.

Für die Ausgangsmatrix $\mathfrak{M}$ wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt errechnet:

$$\mathfrak{f}(t) = \mathfrak{r} + \mathfrak{Z}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + (-\tfrac{1}{8})^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Als auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten Gesamtgewinn G_1 unter den Ausgangsbedingungen erhält man jetzt erwartungsgemäß wegen (VII.5.) S. 106:

$$E\,G_1 = 10^7(1{,}25 - 0{,}90) \sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$+ 10^7(1{,}25 - 0{,}90) \sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{8})^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$- \sum_{t=0}^{\infty} 3{,}15.10^5.0{,}95^t$$

$$= 10^7.0{,}35.(\tfrac{19}{3} - \tfrac{19}{1074}) - 3{,}15.10^5.20 \approx 15{,}8.10^6 \text{ DM}$$

Man vergleiche hierzu die Berechnungen im vorhergehenden Abschnitt.

Dieselbe Rechnung wird nun für die Übergangsmatrix $\mathfrak{M}'$ und das erhöh-

te Werbebudget $b_1' = 6.10^5$ durchgeführt. Man erhält für die Matrix

$$\mathfrak{P}'(t) = \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{11}{23} & \frac{12}{23} \\ \frac{11}{23} & \frac{12}{23} \end{bmatrix} + (-\tfrac{3}{20})^t \begin{bmatrix} \frac{12}{23} & -\frac{12}{23} \\ -\frac{11}{23} & \frac{11}{23} \end{bmatrix}$$

Damit errechnet man E G_1' wie folgt:

$$E\,G_1' = 10^7.0{,}35.\sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{11}{23} & \frac{12}{23} \\ \frac{11}{23} & \frac{12}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$+ 10^7.0{,}35.\sum_{t=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{20})^t \begin{bmatrix} \frac{12}{23} & -\frac{12}{23} \\ -\frac{11}{23} & \frac{11}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .0{,}95^t$$

$$- \sum_{t=0}^{\infty} 6.10^5.0{,}95^t$$

$$= 10^7.0{,}35.\frac{11}{23}.19 - 10^7.0{,}35.\frac{1}{46}.\frac{57}{457} - 120.10^5$$

$$\approx 10^7(3{,}179 - 1{,}2) \approx 19{,}8.10^6 \quad \text{DM}$$

Die Erhöhung des Werbebudgets wirkt sich also gewinnsteigernd aus.

Zu 8.1.2. (S.110-111).

Berechnung des erwartungsgemäßen diskontierten Gewinns einer Unternehmung bei vorgegebener Matrix der Übergangsraten

Für einen MARKOVschen Prozeß mit stetiger Zeitachse können die Vektoren $\vec{a}(t)$ der absoluten Verbrauchswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t bestimmt werden, indem man die inverse LAPLACE-Transformierte der Größe

$$\vec{a}(s) = \vec{a}(0)(s\mathfrak{F}_m - \mathfrak{R})^{-1}$$

errechnet. Dies wurde in diesem Anhang S.192 ff. gezeigt.

Bezeichnen wir diese inverse LAPLACE-Transformierte der Matrix $(s\mathcal{J}_m - \mathcal{R})^{-1}$ mit $\mathcal{S}^*(t)$, so kann diese Größe wiederum als Summe aus zwei Ausdrücken dargestellt werden, nämlich (vgl. HOWARD [77,S.97])

(1) einer stochastischen Matrix $\mathcal{J}^*$, die die Grenz-Wahrscheinlichkeiten enthält,und in der die Zeit t nicht vorkommt;

(2) eine Summe von Differentialmatrizen mit exponentiellen Koeffizienten, die mit $t \to \infty$ gegen Null streben; diese Summe sei mit $\mathcal{T}^*(t)$ bezeichnet.

Wegen $\mathcal{S}^*(t) = \mathcal{J}^* + \mathcal{T}^*(t)$ können wir auf Grund der Gleichung (VIII.2.) S.110 schreiben:

$$E\,G_k = N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \int_1^\infty \vec{a}(0).\mathcal{J}^*.{}^t\vec{e}_k.e^{\beta t}\,dt + N(q_k^{[0]} - \gamma_k) \int_1^\infty \vec{a}(0).\mathcal{T}^*(t).{}^t\vec{e}_k.e^{\beta t}\,dt$$

Die Integration der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite bereitet infolge der sich ergebenden einfachen Exponentialfunktionen keine Schwierigkeiten.

Zu 8.1.2. (S.110-111).

Ein weiteres numerisches Beispiel zur Preispolitik einer Unternehmung

Ein Konsumgut K werde wiederum in 2 Marken K_1 und K_2 angeboten; es gelte γ_1 = 1,00 DM ; q_1 = 1,25 DM ; erwogen werde auch hier eine Preissenkung auf q_1' = 1,20 DM . Der Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten sei $\vec{a}(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; die beiden Differentialmatrizen der Übergangsraten seien

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{R}' = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Es soll geprüft werden, ob sich bei diesen Annahmen die Preissenkung für die Unternehmung, die K_k herstellt, gewinnsteigernd auswirkt; es gelte $\beta = -0{,}05$, der auf organische Verzinsung abgestellte Zinssatz betrage also 5 % . Man erhält:

$$(s\mathcal{F}_2 - \mathcal{R}) = \begin{bmatrix} s+5 & -5 \\ -4 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathcal{F}_2 - \mathcal{R})^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} + \frac{1}{s+9}\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} ,$$

also

$$\mathcal{P}^*(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} + e^{-9t}\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

und damit

$$E\,G_1 = 0{,}25N \cdot \int_1^\infty (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0{,}05t}\, dt$$

$$+ 0{,}25N \int_1^\infty (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \cdot e^{-9t} \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0{,}05t}\, dt$$

$$= \frac{1}{9}N \cdot \int_1^\infty e^{-0{,}05t}\, dt + \frac{1}{72}N \int_1^\infty e^{-9{,}05t}\, dt$$

$$= \frac{1}{9} \cdot e^{-0{,}05} \cdot 20N + \frac{1}{72} \cdot e^{-9{,}05} \cdot \frac{1}{9{,}05} \cdot N \approx 2{,}11N$$

Für die Matrix $\mathcal{R}'$ der Übergangsraten ergibt sich

$$(s\mathcal{F}_2 - \mathcal{R}') = \begin{bmatrix} s+3 & -3 \\ -5 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathcal{F}_2 - \mathcal{R}')^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} + \frac{1}{s+8}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Damit erhält man für G_1' erwartungsgemäß

$$E\,G_1' = N.0{,}20 \int_1^\infty \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0{,}05t}\,dt$$

$$+ N.0{,}20 \int_1^\infty \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).e^{-8t} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0{,}05t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{8}N. \int_1^\infty e^{-0{,}05t}\,dt - \tfrac{1}{40}.N \int_1^\infty e^{-8{,}05t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{8}.e^{-0{,}05}.20N - \tfrac{1}{40}.e^{-8{,}05}.\tfrac{1}{8{,}05}.N \approx 2{,}38N$$

Auch hier ist also $E\,G_1' > E\,G_1$.

Zu 8.2.2. (S.113).

Ein weiteres numerisches Beispiel zur Werbepolitik einer Unternehmung

Wir gehen wiederum von 2 Marken K_1 und K_2 aus und beschäftigen uns mit der Werbepolitik der Unternehmung, die K_1 anbietet. Es sei γ_1 = = 0,90 DM , Werbekosten seien in dieser Größe nicht inbegriffen. Außerdem gelte q_1 = 1,25 DM . Die Unternehmung beabsichtige, ihr Werbebudget von $b_1 = 4{,}25.10^5$ auf $b_1' = 5.10^5$ zu erhöhen. Die beiden Differentialmatrizen der Übergangsraten werden geschätzt auf

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{R}' = \begin{bmatrix} -4{,}8 & 4{,}8 \\ 4{,}2 & -4{,}2 \end{bmatrix} ;$$

es gelte außerdem $\vec{a}(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\beta = -0{,}05$ und $N = 10^7$.

Man erhält unter Berücksichtigung einiger Ergebnisse aus dem vorhergehenden Abschnitt

$$E\,G_1 = 0{,}35.10^7 \int_1^{\infty} \left(\frac{4}{9}.e^{-0{,}05t} + \frac{1}{18}.e^{-9{,}05t}\right)dt - 4{,}25.10^5 \int_0^{\infty} e^{-0{,}05t}\,dt$$

$$\approx (2{,}96 - 0{,}85).10^7 = 2{,}11.10^7 \text{ DM}$$

und weiter:

$$(s\mathcal{F}_2 - \mathcal{R}')^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0{,}467 & 0{,}533 \\ 0{,}467 & 0{,}533 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+9}\begin{bmatrix} 0{,}533 & -0{,}533 \\ -0{,}467 & 0{,}467 \end{bmatrix}$$

und damit

$$E\,G_1' = 0{,}35.10^7 \int_1^{\infty} (0{,}467.e^{-0{,}05t} + 0{,}066.e^{-9{,}05t})dt$$

$$- 6.10^5 \int_0^{\infty} e^{-0{,}05t}\,dt$$

$$\approx 1{,}91.10^7 \text{ DM}$$

Die beabsichtigte Erhöhung des Werbebudgets vermindert den diskontierten zukünftigen Gesamtgewinn.

ERGÄNZUNGEN ZU KAPITEL 4: DIE DURCHFÜHRUNG EMPIRISCHER UNTERSUCHUNGEN ZUR PROGNOSE VON MARKTANTEILEN

Zu 9.1.1.(S.116).

Beweis

von Satz 1: Sind beim Unabhängigkeitsmodell die zu schätzenden Wahlwahrscheinlichkeiten $p(i)$ mit $i \in \{1,\ldots,m\}$ für alle N Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant, so ist

$$\hat{p}(i) = \frac{n(i)}{n}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für $p(i)$.

Setzt man $p(m) = 1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} p(\nu)$, so erhält man zunächst folgende Likelihood-Funktion Λ^*:

$$\Lambda^*(p(1),\ldots,p(i),\ldots,p(m-1)) =$$

$$= \frac{n!}{n(1)!.\ \ .n(m)!}\, p^{n(1)}(1).\ \ .p^{n(i)}(i).\ \ .p^{n(m-1)}(m-1).(1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} p(\nu))^{n(m)}$$

Geht man über zu der entsprechenden logarithmierten Funktion und verzichtet man auf den konstanten Faktor dieser Likelihood-Funktion, so erhält man:

$$\Lambda(p(1),\ldots,p(m-1)) =$$

$$= n(1).\ln p(1) + \ldots + n(m-1).\ln p(m-1) + n(m).\ln\,(1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} p(\nu))$$

Partielle Differentiation dieser Funktion nach p(i) ergibt
$(i \in \{1,\ldots,m-1\})$

$$\frac{\partial}{\partial p(i)}\Lambda(p(1),\ldots,p(m-1)) = \frac{n(i)}{p(i)} - \frac{n(m)}{(1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} p(\nu))}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null und verwendet man die Identität

$$n(m) = n - \sum_{\nu=1}^{m-1} n(\nu) \quad ,$$

so ergibt sich schließlich folgendes System von m-1 Gleichungen:

$$n(i)(1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} p(\nu)) - p(i)(n - \sum_{\nu=1}^{m-1} n(\nu)) = 0$$

oder

$$n.\frac{n(i)}{n}\,(1 - \Sigma\, p(\nu)) - np(i)(1 - \Sigma\, \frac{n(\nu)}{n}) = 0$$

Man erkennt, daß diese Gleichungen erfüllt sind, falls $p(i) = \frac{n(i)}{n}$ ist für $i \in \{1,\ldots,m-1\}$; mit dieser Bedingung ist auch $p(m) = \frac{n(m)}{n}$.

$\hat{p}(i) = \frac{n(i)}{n}$ ist also für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ ein maximum-likelihood-Schätzwert für p(i).

Zu 9.1.1.(S.117-118).

Beweis

von Satz 2: Sind die zu schätzenden Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich und im Zeitablauf invariant, so ist ($i,k \in \{1,\ldots,m\}$)

$$\hat{p}(i,k) = \frac{n(i,k)}{\sum_{l=1}^{m} n(i,l)}$$

ein maximum-likelihood-Schätzwert für die Übergangswahrscheinlichkeit $p(i,k)$ ebenso wie ($i \in \{1,\ldots,m\}$)

$$\hat{a}^{(0)}(i) = \frac{n^{[0]}(i)}{n^*}$$

für die Anfangswahrscheinlichkeiten $a^{(0)}(i)$, wenn bezüglich der $n^{[0]}(i)$ die auf S.117 angegebenen Voraussetzungen gelten.

Da die Anfangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte annahmegemäß gleich sind, ergibt sich aus der Betrachtung der Ausgangszustände für die gesuchte Likelihood-Funktion der Faktor

$$\frac{n^*!}{\prod_{\nu=1}^{m} n^{[0]}(\nu)!} \prod_{\nu=1}^{m-1} (a^{(0)}(\nu))^{n^{[0]}(\nu)} \cdot (1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} a^{(0)}(\nu))^{n^{[0]}(m)} ,$$

wenn man $a^{(0)}(m) = 1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} a^{(0)}(\nu)$ setzt.

Weiter kann man die Anzahlen $n(i,1),\ldots,n(i,k),\ldots,n(i,m)$ der Übergänge von K_i zu jeder der m Marken auffassen als multinomialverteilte Zufallsvariablen mit Stichprobenumfang $\sum_{l=1}^{m} n(i,l)$ und Wahrscheinlichkeiten $p(i,1),\ldots,p(i,k),\ldots,p(i,m)$. Dies gilt für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$. Für jedes i ergibt sich demnach

$$\frac{(\sum_{l=1}^{m} n(i,l))!}{\prod_{l=1}^{m} n(i,l)!} \prod_{l=1}^{m-1} p^{n(i,l)}(i,l) \cdot (1 - \sum_{l=1}^{m-1} p(i,l))^{n(i,m)}$$

als Faktor zur gesuchten Likelihood-Funktion. Wir gehen gleich über

zum natürlichen Logarithmus dieser Funktion, streichen die sich ergebenden konstanten Faktoren und erhalten

$$\Lambda(a^{(0)}(1),\ldots,a^{(0)}(m-1);p(1,1),\ldots,p(1,m-1);\ldots;p(m,1),\ldots,p(m,m-1)) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1} n^{[0]}(\nu).\ln a^{(0)}(\nu) + n^{[0]}(m).\ln\left(1 - \sum_{\nu=1}^{m-1} a^{(0)}(\nu)\right)$$

$$+ \sum_{1=1}^{m-1} n(1,1).\ln p(1,1) + n(1,m).\ln\left(1 - \sum_{1=1}^{m-1} p(1,1)\right) + \ldots +$$

$$+ \sum_{1=1}^{m-1} n(m,1).\ln p(m,1) + n(m,m).\ln\left(1 - \sum_{1=1}^{m-1} p(m,1)\right)$$

Man erkennt aus der Gestalt dieser Funktion leicht, daß ihre gleich Null gesetzten partiellen Ableitungen nach den zu schätzenden Werten $a^{(0)}(i)$ bzw. $p(i,k)$ zu insgesamt $(m+1)$ Systemen von je $(m-1)$ Gleichungen führen, die genau dieselbe Struktur aufweisen wie das Gleichungssystem, das sich im Verlauf des Beweises zu Satz 1 S.205 ergab. Die maximum-likelihood-Schätzwerte

$$\hat{a}^{(0)}(i) = \frac{n^{[0]}(i)}{n^*} \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{p}(i,k) = \frac{n(i,k)}{n}$$

für die Anfangs- und Übergangswahrscheinlichkeiten können deshalb wie früher bestimmt werden.

Zu 9.1.1.(S.119).

Ein einfaches Beispiel zur Schätzung von Anfangs- und Übergangswahrscheinlichkeiten aus einer Stichprobe

Für eine Stichprobe von $n^* = 5$ Haushalten liegen Beobachtungen über die Markenwahlvorgänge in bezug auf ein Konsumgut K vor, das in Form von 3 konkurrierenden Marken K_1, K_2 und K_3 angeboten wird. Je Haushalt wurden 8 sukzessive Markenwahlvorgänge registriert. Von vornherein wird angenommen, daß die Anfangs- und Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Haushalte gleich, außerdem, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf invariant sind. Folgende Markenverbrauchsfolgen liegen vor:

I: K_1; K_3, K_2, K_2, K_1, K_3, K_1, K_3, K_2

II: K_3; K_1, K_2, K_3, K_1, K_2, K_3, K_1, K_1

III: K_2; K_3, K_2, K_1, K_1, K_1, K_3, K_3, K_2

IV: K_2; K_1, K_3, K_2, K_1, K_2, K_3, K_3, K_3

V: K_3; K_1, K_1, K_2, K_2, K_3, K_2, K_1, K_2

Für die Anfangswahrscheinlichkeiten erhält man aus diesem empirischen Befund folgende maximum-likelihood-Schätzwerte:

$$\hat{a}^{(0)}(1) = \frac{1}{5} \; ; \; \hat{a}^{(0)}(2) = \frac{2}{5} \; ; \; \hat{a}^{(0)}(3) = \frac{2}{5}$$

Außerdem ergibt sich folgende Matrix $\mathfrak{N}$ der Übergangshäufigkeiten:

$$\mathfrak{N} = (n(i,k)) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

und damit schließlich die Matrix

$$\hat{\mathfrak{M}} = (\hat{p}(i,k)) = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

der maximum-likelihood-Schätzwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Zu 9.1.2.(S.122).

Berechnung der Bestimmungsgleichungen für die Schätzwerte $\hat{p}(i,k)$ der Übergangswahrscheinlichkeiten nach der Methode der kleinsten Quadratsumme

Nach der Methode der kleinsten Quadratsumme ist die Größe

$$\sum_{t=1}^{T} \left[\hat{v}_{[t]}(k) \right]^2 \qquad (k \in \{1, \ldots, m\})$$

zu minimieren unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{p}(i,k) = 1 \qquad (i \in \{1,\ldots,m\}) \quad ,$$

so daß die Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}(i,k)} \quad \sum_{t=1}^{T} \left(\hat{v}^{[t]}(k)\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} L_i \left(\sum_{k=1}^{m} \hat{p}(i,k) - 1\right)$$

verschwinden müssen. Mit L_i wurden die LAGRANGE-Multiplikatoren bezeichnet. Geht man bezüglich der Definition von $\hat{v}^{[t]}(k)$ einen Augenblick von Gleichung (IX.3.) aus, so ergibt sich für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{v}^{[t]}(k) n^{[t-1]}(i) - \frac{L_i}{2} = 0 \qquad (*) \quad ;$$

leitet man nämlich $\hat{v}^{[t]}(k)$ nach $\hat{p}(i,k)$ ab, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}(i,k)} \hat{v}^{[t]}(k) = - n^{[t-1]}(i)$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^{m} n^{[t]}(i) = \sum_{i=1}^{m} n^{[t-1]}(i) = n^*$$

und

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{p}(k,i) = 1 \; ;$$

somit erhält man

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{v}^{[t]}(k) = n^* - \sum_{i=1}^{m} n^{[t-1]}(i) = 0$$

Damit resultiert durch Addition der Gleichungen (*) für alle k (vgl. GOODMAN [53,S.247]) $L_i = 0$ für alle i und eine wesentliche Erleichterung der Rechnung, weil die eingeführten Nebenbedingungen automatisch erfüllt sind, wenn man die Methode der kleinsten Quadratsumme verwendet.

Zunächst ist nun unter Berücksichtigung von (IX.3'.)

$$\frac{\partial}{\partial p(k,k)} \quad \sum_{t=1}^{T} \left[\hat{v}^{[t]}(k)\right]^2 = - n^* \sum_{t=1}^{T} \hat{v}^{[t]}(k)$$

Setzt man diesen Differentialquotienten gleich Null, so ergibt sich (IX.4b.) wie folgt:

$$\sum_{t=1}^{T} n^{[t]}(k) - T.n^{*}\hat{p}(k,k) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k) \sum_{t=1}^{T} n^{[t-1]}(i) = 0$$

$$\bar{n}^{[t]}(k) = n^{*}\hat{p}(k,k) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k)\bar{n}^{[t-1]}(i)$$

Mit diesem Ergebnis läßt sich (IX.4a.) folgendermaßen ermitteln ($l \neq k$):

$$\sum_{t=1}^{T} \phi^{[t]}(k) n^{[t-1]}(l) = 0$$

Wegen $\sum_{t=1}^{T} \phi^{[t]}(k) = 0$ darf man schreiben:

$$\sum_{t=1}^{T} (n^{[t]}(k) - n^{*}\hat{p}(k,k) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k) n^{[t-1]}(i))(n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l)) = 0$$

Nach (IX.4b.) ist

$$n^{*}\hat{p}(k,k) = \bar{n}^{[t]}(k) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k)\bar{n}^{[t-1]}(i) \quad ;$$

damit hat man

$$\sum_{t=1}^{T} \left[n^{[t]}(k) - \bar{n}^{[t]}(k) - \sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k)(n^{[t-1]}(i) - \bar{n}^{[t-1]}(i)) \right] \cdot$$

$$\cdot (n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l)) = 0$$

und schließlich

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{\Delta}(i,k) \left[\sum_{t=1}^{T} (n^{[t-1]}(i) - \bar{n}^{[t-1]}(i))(n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l)) \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{T} (n^{[t]}(k) - \bar{n}^{[t]}(k))(n^{[t-1]}(l) - \bar{n}^{[t-1]}(l))$$

Literaturverzeichnis

1 ALLISON, H. E., C. J. ZWICK und A. BRINSER: Recruiting and Maintaining a Consumer Panel. The Journal of Marketing, Chicago, 22 (1958), 377-390.

2 ANDERSON, T. W.: Probability Models for Analyzing Time Changes in Attitudes. In: Mathematical Thinking in the Social Sciences, herausgegeben von P. F. LAZARSFELD. Glencoe (Ill.) 1954, 17-66.

3 ANDERSON, T. W. und L. A. GOODMAN: Statistical Inference about Markov Chains. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 28 (1957), 89-110.

4 ARROW, K. J.: Social Choice and Individual Values. Cowles Commission Monograph No. 12. New York und London 1951, XI + 99 S.

5 AUMANN, R. J.: Markets with a Continuum of Traders. Econometrica, Chicago, 32 (1964), 39-50.

6 AUMANN, R. J.: A Survey of Cooperative Games without Side Payments. In: Essays in Mathematical Economics, herausgegeben von M. SHUBIK zu Ehren von O. MORGENSTERN. Princeton 1967, 3-27.

7 BASMANN, R. L.: A Theory of Demand with Variable Consumer Preferences. Econometrica, Chicago, 24 (1956), 47-58.

8 BELLMAN, R.: Dynamic Programming. Princeton 1957, XXV + 342 S.

9 BHARUCHA-REID, A. T.: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. New York, Toronto und London 1960, XI + 468 S.

10 BILLINGSLEY, P.: Statistical Methods in Markov Chains. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 32 (1961), 12-40.

11 BÖSSMANN, E.: Probleme einer dynamischen Theorie der Konsumfunktion (Diss.). Berlin 1957, 110 S.

12 BORDEN, N. H.: The Economic Effects of Advertising. Chicago 1942.

13 BOYD, H. W. Jr. und R. L. WESTFALL: An Evaluation of Continuous

Consumer Panels as a Source of Marketing Information. Chicago 1960.

14 BRANDT, K.: Ökonomisches Gleichgewicht. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, vierter Band. Stuttgart, Tübingen und Göttingen 1965, 599-606.

15 BURKE, C. J. und M. ROSENBLATT: A Markovian Function of a Markov Chain. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 29 (1958), 1112-1122.

16 BUSH, R. R. und F. MOSTELLER: Stochastic Models for Learning. New York und London 1955, XVI + 365 S.

17 BUSHAW, D. W. und R. W. CLOWER: Introduction to Mathematical Economics. Homewood (Ill.) 1957, XII + 345 S.

18 CAMPBELL, D. T.: Common Fate, Similarity and Other Indices of the Status of Aggregates of Persons as Social Entities. In: WILLNER, D. (Hrsg.): Decisions, Values and Groups, Band 1. Report from the First Interdisciplinary Conference in the Behavioral Science Division held at the University of New Mexico. Oxford, London, New York und Paris 1960, 185-201.

19 CASSEL, G.: Theoretische Sozialökonomie. Leipzig 1918, XII + 582 S.

20 CHAMBERLIN, E. H.: Theory of Monopolistic Competition. 7. Auflage, Cambridge (Mass.) und London 1956, XIV + 350 S.

21 CHARNES, A. und W. W. COOPER: An Example of Constrained Games in Industrial Economics. Econometrica, Chicago, 22 (1954), 526-527.

22 CHIPMAN, J.: The Foundations of Utility. Econometrica, Chicago, 28 (1960), 193-224.

23 COURNOT, A.: Recherches sur les Principes Mathematiques de la Théorie des Richesses, Paris 1838. Dt. Übersetzung von W. G. WAFFENSCHMIDT, Jena 1924, 68-78, erschienen in der Sammlung sozialwissenschaftlicher Meister.

24 COX, D. R. und H. D. MILLER: The Theory of Stochastic Processes. London 1965, VII + 398 S.

25 CRAMER, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton 1946, XVI + 574 S.

26 CRAMER, H. und M. R. LEADBETTER: Stationary and Related Stochastic Processes. New York, London und Sydney 1967, XII + 348 S.

27 DEBREU, G.: Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: THRALL, R. M., C. H. COOMBS und R. L. DAVIS (Hrsg.): Decision Processes. New York und London 1954, 159-165.

28 DEBREU, G.: Theory of Value. Cowles Commission Monograph No. 17. New York und London 1959, XII + 114 S.

29 DOOB, J. L.: Stochastic Processes. New York und London 1953, VII + 654 S.

30 DUESENBERRY, J. S.: Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior. Cambridge (Mass.) 1952, 124 S.

31 EDGEWORTH, F. Y.: Mathematical Psychics. London 1881, VIII + 150 S.

32 EHRENBERG, A. S. C.: An Appraisal of Markov Brand-Switching Models. The Journal of Marketing Research, Chicago, 2 (1965), 347-362.

33 EISBERG, R. M.: Fundamentals of Modern Physics. New York und London 1961, XIII + 729 S.

34 ERDÖS, P., W. FELLER und H. POLLARD: A Theorem on Power Series. Bulletin of the American Mathematical Society, Menasha (Wisc.), 55 (1949), 201-204.

35 EVANS, F. B.: Psychological and Objective Factors in the Prediction of Brand Choice: Ford versus Chevrolet. The Journal of Business, Chicago, 32 (1959), 340-369.

36 EVANS, F. B. und H. V. ROBERTS: Fords, Chevrolets, and the Problem of Discrimination. The Journal of Business, Chicago, 36

(1963), 242-249.

37 FARLEY, J. U.: Why Does "Brand Loyality" Vary Over Products? The Journal of Marketing Research, Chicago, 1 (1964), 4, 9-14.

38 FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Band 1. New York und London 1950, XII + 419 S.

39 FELS, E. M.: Zur Theorie und Messung nichtadditiver Nachfragefunktionen (Diss.). München 1953, 168 S.

40 FELS, E. M.: Grundschule der kleinsten Quadrate. Ifo-Studien, Zeitschrift des Ifo-Instituts für Wirtschaftsforschung, München, 6 (1960), 31-59.

41 FELS, E. M.: Hedonistic Calculus as Seen from a Distance. Weltwirtschaftliches Archiv, Hamburg, 91 (1963), 100-124.

42 FERBER, R.: Observations on a Consumer Panel Operation. The Journal of Marketing, Chicago, 17 (1953), 246-259.

43 FERBER, R. und P. J. VERDOORN: Research Methods in Economics and Business. New York 1962, XIV + 573 S.

44 FERBER, R.: Research on Household Behavior. The American Economic Review, Menasha (Wisc.), 52 (1962), 19-63.

45 FEYNMAN, R. P., R. B. LEIGHTON und M. SANDS: The Feynman Lectures on Physics. Reading (Mass.) 1963, ca. 400 S.

46 FISHER, R. A.: Statistical Methods for Research Workers. 11.Auflage, Edinburgh und London 1950, XV + 354 S.

47 FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (Übersetzung aus dem Polnischen). 3. Auflage, Berlin 1965, X + 551 S.

48 FRIEDERICHS, G.: Verkaufswerbung, ihre Technik, Psychologie und Ökonomie. Berlin 1958, 183 S.

49 FRISCH, R.: New Methods of Measuring Marginal Utility. Tübingen 1932, 142 S.

50 GEORGESCU-ROEGEN, N.: The Pure Theory of Consumer's Behavior. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 50 (1936), 545-593.

51 GEORGESCU-ROEGEN, N.: The Theory of Choice and the Constancy of Economic Laws. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 64 (1950), 125-138.

52 GNEDENKO, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übersetzung aus dem Russischen). 4. Auflage, Berlin 1965, XIII + 393 S.

53 GOODMAN, L. A.: A Further Note on Miller's "Finite Markov Processes in Psychology". Psychometrika, Richmond, 18 (1953), 245-248.

54 GOODMAN, L. A.: Simplified Run Tests and Likelihood Ratio Tests for Markov Chains. Biometrika, London, 45 (1958), 181-197.

55 GREEN, H. A. J.: Aggregation in Economic Analysis. Princeton 1964, IX + 129 S.

56 GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Erster Band: Die Produktion. 11. Auflage, Berlin, Heidelberg und New York 1965, XII + 505 S.

57 GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Zweiter Band: Der Absatz. 9. Auflage, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1966, XI + 507 S.

58 HAAS, C.: Unsicherheit und Risiko in der Preisbildung. Köln, Berlin, Bonn und München 1965, 147 S.

59 HAHN, F. H. und R. C. O. MATTHEWS: The Theory of Economic Growth: A Survey. In: Surveys of Economic Theory. Band 2: Growth and Development. London, Melbourne, Toronto und New York 1965, S. 1-124.

60 HALLER, H.: Der Erkenntniswert der Oligopoltheorien. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Stuttgart, 162 (1950), 81-98.

61 HANF, E.: Prognose mittels Markov-Ketten. Mit einem Tabellenan-

hang. Unveröffentlichtes Manuskript, Institut für Wirtschaftslehre des Landbaues der Landwirtschaftlichen Hochschule Stuttgart-Hohenheim, 1966, 29 + 7 S.

62 HARARY, F. und B. LIPSTEIN: The Dynamics of Brand Loyality: A Markovian Approach. Operations Research, Baltimore, 10 (1962), 19-40.

63 HARDER, T.: Elementare mathematische Modelle in der Markt- und Meinungsforschung. München und Wien 1966, 189 S.

64 HAUSNER, M.: Multidimensional Utilities. In: THRALL, R. M., C. H. COOMBS und R. L. DAVIS (Hrsg.): Decision Processes. New York und London 1954, 167-180.

65 HEINEN, E.: Die Zielfunktion der Unternehmung. In: Zur Theorie der Unternehmung; Festschrift für E. GUTENBERG. Wiesbaden 1962, 9-72.

66 HEINEN, E.: Betriebswirtschaftliche Kostenlehre. Erster Band: Begriff und Wesen der Kosten. 2. Auflage, Wiesbaden 1965, 560 S.

67 HEINEN, E.: Das Zielsystem der Unternehmung. Wiesbaden 1966, 279 S.

68 HENDERSON, J. M. und R. E. QUANDT: Microeconomic Theory. New York, Toronto und London 1958, XII + 291 S.

69 HERNITER, J. D. und J. F. MAGEE: Customer Behavior as a Markov Process. Operations Research, New York, 9 (1961), 105-122.

70 HERSTEIN, I. N. und J. MILNOR: An Axiomatic Approach to Measurable Utility. Econometrica, Chicago, 21 (1953), 291-297.

71 HICKS, J. R. und R. G. D. ALLEN: Eine erneute Betrachtung der Werttheorie (1.Teil); eine mathematische Theorie der individuellen Nachfragefunktionen. In: OTT, A. E. (Hrsg.): Preistheorie. Köln und Berlin 1965, 117-161. Übersetzung von: A Reconsideration of the Theory of Value. Economica NS, London, 1 (1934), 52-76 und 196-219.

72 HICKS, J. R.: Value and Capital. 2. Auflage, Oxford 1948,

XI + 340 S.

73 HICKS, J. R.: A Revision of Demand Theory. Oxford 1956, VII + 196 S.

74 HOEL, P. G.: A Test for Markov Chains. Biometrika, London, 41 (1954), 430-433.

75 HOUTHAKKER, H. S.: Revealed Preference and the Utility Function. Economica, London, Neue Folge 17 (1950), 159-174.

76 HOWARD, J. A.: Marketing Management. Überarbeitete Auflage, Homewood (Ill.) 1963, XI + 487 S.

77 HOWARD, R. A.: Dynamic Programming and Markov Processes. New York und London 1960, VIII + 136 S.

78 JAMES, S. F. und W. BECKERMAN: Interdependence of Consumer Preferences in the Theory of Income Redistribution. The Economic Journal, London, 63 (1953), 70-83.

79 JASPERT, F.: Methoden zur Erforschung der Werbewirkung. Stuttgart 1963, XI + 307 S.

80 JEVONS, W. S.: Die Theorie der politischen Ökonomie. Übersetzung der 4. Auflage von: Theory of Political Economy, London 1911. Jena 1924, LXVIII + 280 S.

81 JOHNSTON, J.: Statistical Cost Analysis. New York, Toronto und London 1960, IX + 197 S.

82 KATONA, G.: Das Verhalten der Verbraucher und Unternehmer. Übersetzung von: Psychological Analysis of Economic Behavior, New York, Toronto und London 1951. Tübingen 1960, XXXV + 452 S.

83 KELLERER, H.: Statistik im modernen Wirtschafts- und Sozialleben. 2. Auflage, Reinbek bei Hamburg 1963, 303 S.

84 KELLERER, H.: Statistik. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften, zweiter Band, herausgegeben von K. HAX und T. WESSELS. 2. Auflage, Köln und Opladen 1966, 387-465.

85 KEMENY, J. G. und J. L. SNELL: Finite Markov Chains. Princeton,

Toronto, London und New York 1960, VIII + 210 S.

86 KLEIN, L. R.: Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior. Econometrica, Chicago, 14 (1946), 93-108.

87 KLEIN, L. R.: An Introduction to Econometrics. Englewood Cliffs (N. J.) 1962, VIII + 280 S.

88 KOOPMANS, T. C. (Hrsg.): Statistical Inference in Dynamic Economic Models. Mit einer Einführung von J. MARSCHAK. Cowles Commission Monograph No. 10, New York und London 1950, XIV + 438 S.

89 KORNDÖRFER, W.: Die Aufstellung und Aufteilung des Werbebudgets. Stuttgart 1966, XII + 248 S.

90 KRELLE, W.: Preistheorie. Tübingen und Zürich 1961, XXIV + 729 S.

91 KUEHN, A. A.: An Analysis of the Dynamics of Consumer Behavior and its Implications for Marketing Management. Unveröffentlichte Ph. D. Dissertation, Carnegie Institute of Technology, 1958, IV + 144 S.

92 KUEHN, A. A.: Demonstration of a Relationship between Psychological Factors and Brand Choice. The Journal of Business, Chicago, 36 (1963), 237-241.

93 KUENNE, R. E.: The Theory of General Economic Equilibrium. Princeton 1963, XV + 590 S.

94 LANCASTER, K. J.: A New Approach to Consumer Theory. The Journal of Political Economy, Chicago, 74 (1966), 132-157.

95 LEIBENSTEIN, H.: Bandwagon, Snob, and Veblen Effects in the Theory of Consumers' Demand. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 64 (1950), 183-207.

96 LITTLE, I. M. D.: A Critique of Welfare Economics. 2. Auflage, Oxford 1957, VI + 302 S.

97 LOCKLEY, L. C.: Use of Principles in the Management of Advertising. The Journal of Marketing, Chicago, 19 (Januar 1955), 258-260.

98 LUCAS, D. B. und S. H. BRITT: Measuring Advertising Effectiveness. New York, Toronto, London und San Francisco 1963, XI + 399 S.

99 MADANSKY, A.: Least Squares Estimation in Finite Markov Processes. Psychometrika, Richmond, 24 (1959), 137-144.

100 MANN, H. B. und A. WALD: On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations. Econometrica, Chicago, 11 (1943), 173-220.

101 MARSCHAK, J.: Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility. Econometrica, Chicago, 18 (1950), 111-141.

102 MARSHALL, A.: Principles of Economics. 9. Auflage, London 1961, Band 1 (Text), XXXIV + 858 S.

103 MCGARVEY, D. C.: A Theorem on the Construction of Voting Paradoxes. Econometrica, Baltimore, 21 (1953), 608-610.

104 MENGER, C.: Grundsätze der Volkswirtschaftslehre. 2. Auflage, Wien und Leipzig 1923, XXVI + 335 S.

105 MILLER, G. A.: Finite Markov Processes in Psychology. Psychometrika, Richmond, 17 (1952), 149-167.

106 MODIGLIANI, F. und R. BRUMBERG: Utility Analysis and the Consumtion Function: An Interpretation of Cross-Section Data. In: KURIHARA, K. K. (Hrsg.): Post-Keynesian Economics. New Brunswick (N. J.) 1954, XVIII + 422 S.

107 MÖLLER, H.: Kalkulation, Absatzpolitik und Preisbildung. Nachdruck mit einer neuen Einführung über: Die Entwicklung der modernen Preistheorie. Tübingen 1962, LVII + 222 S.

108 MORGENSTERN, O.: Demand Theory Reconsidered. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 62 (1948), 165-201.

109 MOSTELLER, F. und P. NOGEE: An Experimental Measurement of Utility. The Journal of Political Economy, Chicago, 59 (1951), 371-404.

110 NEUMANN, J. v. und O. MORGENSTERN: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten. Übersetzung der 3. Auflage von "Theory of Games and Economic Behavior", Würzburg 1961, XXIV + 668 S.

111 NEWMAN, P.: The Theory of Exchange. Englewood Cliffs (N. J.) 1965, XI + 201 S.

112 NIESCHLAG, R.: Was bedeutet die Marketing-Konzeption für die Lehre von der Absatzwirtschaft? Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Köln und Opladen, Neue Folge, 15 (1963), 549-559.

113 NYBLEN, G.: The Problem of Summation in Economic Science. Lund 1951, XII + 289 S.

114 Operations Research Center, M. I. T.: Notes on Operations Research. Cambridge (Mass.) 1959, VIII + 256 S.

115 PARETO, V.: Manuel d'Economie politique. 2. Auflage, französische Übersetzung der italienischen Ausgabe, Paris 1927, 695 S.

116 PARZEN, E.: Stochastic Processes. San Francisco, London und Amsterdam 1962, XI + 324 S.

117 PRABHU, N. U.: Stochastic Processes. Basic Theory and Its Applications. New York und London 1965, XII + 233 S.

118 QUAKENBUSH, G. G. und J. D. SHAFFER: Collecting Food Purchase Data by a Consumer Panel. East Lansing (Mich.) 1960.

119 RENYI, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie. Berlin 1962, XI + 547 S.

120 RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin, Göttingen und Heidelberg 1956, XI + 435 S.

121 RICHTER, R.: Preistheorie. Wiesbaden 1963, 212 S.

122 RITTIG, G.: Die Indeterminiertheit des Preissystems. In: Jahrbücher für Sozialwissenschaft 1 (1950); herausgegeben von C. BRINKMANN, A. PREDÖHL und R. SCHAEDER. Göttingen 1950, 213-247.

123 ROBINSON, E. A.: A Stochastic Diffusion Theory of Price. Econo-

metrica, Baltimore, 27 (1959), 679-684.

124 ROOS, C. F.: Dynamic Economics. Cowles Commission Monograph No. 1, Chicago 1934, 275 S.

125 ROSENBLATT, M.: Random Processes. New York 1962, X + 208 S.

126 SAMUELSON, P. A.: A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. Economica NS, London, 5 (1938), 61-71.

127 SAMUELSON, P. A.: Foundations of Economic Analysis. Cambridge (Mass.) 1948, XII + 447 S.

128 SAMUELSON, P. A.: Social Indifference Curves. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 70 (1956), 1-22.

129 SAUERMANN, H.: Einführung in die Volkswirtschaftslehre, zweiter Band. Wiesbaden 1964, 248 S.

130 SAVAGE, L. J.: The Foundations of Statistics. New York und London 1954, XV + 294 S.

131 SCHMETTERER, L.: Einführung in die mathematische Statistik. Wien 1956, XXIII + 405 S.

132 SCHNEIDER, E.: Zur Konkurrenz und Preisbildung auf vollkommenen und unvollkommenen Märkten. Weltwirtschaftliches Archiv, Hamburg, 48 (1938), 399-419.

133 SCHNEIDER, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie. Band 2: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft. 10. Auflage, Tübingen 1965, VIII + 447 S.

134 SCHULTZ, H.: The Theory and Measurement of Demand. Chicago 1938, XXIX + 817 S.

135 SCHUPACK, M. B.: The Predictive Accuracy of Empirical Demand Analyses. The Economic Journal, London, 72 (1962), 550-575.

136 SHAW, M. E.: Behavior in Groups: The Development of a Scale to Measure Individual Prominence. In: WILLNER, D. (Hrsg.): Decisions, Values and Groups, Band 1. Reports from the First Interdisciplinary Conference in the Behavioral Science held at the

University of New Mexico. Oxford, London, New York und Paris 1960, 229-240.

137 SHUBIK, M.: Information, Theories of Competition, and the Theory of Games. The Journal of Political Economy, Chicago, 60 (1952), 145-150.

138 SHUBIK, M.: The Use of Game Theory in Management Science. Management Science, Baltimore, 2 (1956), 40-54.

139 SHUBIK, M.: Strategy and Market Structure. New York und London 1959, XVIII + 387 S.

140 SIMON, H. A.: A Behavioral Model of Rational Choice. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 69 (1955), 99-118.

141 SIMON, H. A.: Rationality and Administrative Decision Making. In: Models of Man. New York und London 1957, 196-206.

142 SLUTZKY, E. E.: Zur Theorie des Verbraucherbudgets. In: OTT, A. E. (Hrsg.): Preistheorie. Köln und Berlin 1965, 87-116. Übersetzung von: Sulla teoria del bilancio del consumatore. Giornale degli Economisti, Padua, 51 (1915), 1-26.

143 SMIRNOV, W. I.: Lehrgang der Höheren Mathematik (Übersetzung aus dem Russischen). Teil I: 4. Auflage, Berlin 1961, XII + 419 S. Teil II: 5. Auflage, Berlin 1963, XII + 583 S.

144 STACKELBERG, H. v.: Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels. Zeitschrift für Nationalökonomie, Wien, 4 (1933), 456-472.

145 STACKELBERG, H. v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre. 2. Auflage, Bern und Tübingen 1951, XVI + 368 S.

146 STAFFORD, J. E.: Effects of Group Influences on Consumer Brand Preferences. The Journal of Marketing Research, Chicago, 3 (1966), 68-75.

147 Statistisches Bundesamt (Hrsg.): Stichproben in der amtlichen Statistik. Stuttgart und Mainz 1960, 626 S.

148 STENGER, H.: Die Aggregation linearer Nutzenfunktionen (Diss.). München 1964, 59 S.

149 STIGLER, G. J.: The Limitations of Statistical Demand Curves. Journal of the American Statistical Association, Washington (D. C.), 34 (1939), 469-481.

150 STUBENRAUCH, H.: Theorie und Technik der Rotationen in der Wirtschafts- und Sozialstatistik. Diplomarbeit, Institut für Statistik der Universität München, München 1962, 54 + XIV S.

151 STYAN, G. P. H. und H. SMITH Jr.: Markov Chains Applied to Marketing. The Journal of Marketing Research, Chicago, 1 (1964), 1, 50-55.

152 SUDMAN, S.: On the Accuracy of Recording of Consumer Panels. I und II. The Journal of Marketing Research, 1 (1964), 2, 14-20 und 3, 69-80.

153 SUPPES, P. und M. WINET: An Axiomatization of Utility Based on the Notion of Utility Differences. Management Science, Baltimore, 1 (1956), 259-270.

154 TAKACZ, L.: Stochastische Prozesse. Aufgaben und Lösungen. München und Wien 1966, 140 S.

155 TELSER, L. G.: The Demand for Branded Goods as Estimated from Consumer Panel Data. The Review of Economics and Statistics, Cambridge (Mass.), 44 (1962), 300-324.

156 TELSER, L. G.: Least-Squares Estimates of Transition Probabilities. In: Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld, published by Stanford University Press, 1963, 270-292.

157 THEIL, H.: Linear Aggregation of Economic Relations. Amsterdam 1954, XI + 205 S.

158 THRALL, R. M.: Application of Multidimensional Utility Theory. In: THRALL, R. M., C. H. COOMBS und R. L. DAVIS (Hrsg.): Decision Processes. New York und London 1954, 181-186.

159 TINTNER, G.: The Maximization of Utility over Time. Econometrica, Chicago, 6 (1938), 154-158.

160 TINTNER, G.: A Contribution to the Non-Static Theory of Choice. The Quarterly Journal of Economics, Cambridge (Mass.), 56 (1941/42), 274-306.

161 TINTNER, G.: Econometrics. New York und London 1952, XIII + 370 S.

162 TINTNER, G.: Ein Beitrag zur nicht-statischen Werttheorie. Zeitschrift für Nationalökonomie, Wien, 14 (1954), 358-365.

163 TRIFFIN, R.: Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory. Cambridge (Mass.) 1949, XI + 195 S.

164 UZAWA, H.: Preference and Rational Choice. In: Mathematical Methods in the Social Sciences. Proceedings of the First Stanford Symposium (1959). Herausgegeben von K. J. ARROW, S. KARLIN und P. SUPPES. Stanford 1960, 129-148.

165 VAILE, R. S.: Science Applied to Advertising. The Journal of Marketing, Chicago, 20 (Juli 1955), 48-49.

166 VIDALE, M. L. und H. B. WOLFE: An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising. Operations Research, Baltimore, 5 (1957), 370-381.

167 VAN DER WAERDEN, B. L.: Mathematische Statistik. 2. Auflage, Berlin, Heidelberg und New York 1965, XI + 360 S.

168 WALD, A.: Statistical Decision Functions. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 20 (1949), 165-224.

169 WALLIS, W. A. und M. FRIEDMAN: The Empirical Derivation of Indifference Functions. In: Studies in Mathematical Economics and Econometrics, Band 1. Herausgegeben von O. LANGE und MC INTIRY zu Ehren von H. SCHULTZ. Chicago 1942, S. 175 ff.

170 WILHELM, H.: Werbung als wirtschaftstheoretisches Problem. Berlin 1961, 232 S.

171 WOLD, H. und L. JUREEN: Demand Analysis. Stockholm und New York 1952, XVI + 358 S.

172 YANCE, J. V.: A Model of Price Flexibility. The American Economic Review, Stanford, 50 (1960), 401-418.

173 ZURMÜHL, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 3. Auflage, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1961, XVI + 459 S.

Lebenslauf

Am 25. November 1940 wurde ich als Sohn des heutigen Prokuristen Eugen Schaich und seiner Ehefrau Emma, geborene Röhm, in Stuttgart geboren. Meine Kindheit verbrachte ich im Kreise meiner beiden Geschwister in Metzingen im Landkreis Reutlingen.

Ab September 1946 besuchte ich drei Jahre lang die Volksschule in Metzingen und anschließend für fast sechs Jahre das damalige Progymnasium Metzingen. Nach wiederum dreijährigem Besuch des Johannes-Kepler-Gymnasiums Reutlingen legte ich dort im Februar 1958 die Reifeprüfung ab. Dann absolvierte ich eine zweijährige kaufmännische Lehre bei der Firma Dr. Karl Thomae GmbH., chemisch-pharmazeutische Fabrik, Biberach an der Riß, die ich im April 1960 mit der Kaufmannsgehilfenprüfung vor der Industrie- und Handelskammer Ravensburg abschloß. Im Sommersemester 1960 begann ich mein Studium an der Staatswirtschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität zu München und beendete es im Frühjahr 1964 mit der Diplom-Prüfung für Handelslehrer.

Seit September 1964 bin ich als Verwalter einer Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Statistik der Universität München tätig.

Ich bin seit Sommer 1965 mit Gisela Schaich, geborene Felgner, verheiratet. Mein Sohn Christoph wurde am 30. Mai 1966 geboren.